EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

BURGERS' TİPİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YÜKSEK MERTEBEDEN PARÇALAMA(SPLITTING) METODLARI İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Muaz SEYDAOĞLU

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

Sunuş Tarihi: 30.03.2015

Bornova-İzmir

2015

Muaz SEYDAOĞLU tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan **"Burgers' Tipi Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yüksek Mertebeden Parçalama(Splitting) Metodları İle Sayısal Çözümleri Üzerine"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **30.03.2015** tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ**	
Raportör Üye	**: Yard. Doç. Dr. Utku ERDOĞAN**	
Üye	**: Prof. Dr. Emine MISIRLI**	
Üye	**: Prof. Dr. Gamze TANOĞLU**	
Üye	**: Prof. Dr. Pınar DÜNDAR**	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum **"Burgers' Tipi Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yüksek Mertebeden Parçalama(Splitting) Metodları İle Sayısal Çözümleri Üzerine"** başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

30.03.2015

Muaz SEYDAOĞLU

ÖZET

BURGERS' TİPİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YÜKSEK MERTEBEDEN PARÇALAMA(SPLITTING) METODLARI İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

SEYDAOĞLU, Muaz

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Mart 2015, 62 sayfa

Bu tezde, 1- boyutlu Burgers' tipi kısmi diferansiyel denklemlerin farklı sınır koşulları için yüksek mertebeden parçalama(Splitting) metodları ile çözümleri araştırılmıştır. 2. mertebeden reel katsayılı parçalama metodları zorunlu olarak bazı negatif katsayıları içerir ve dolayısıyla bu metodlar Laplacian operatörünü barındıran Burgers' tipi denklemler gibi zaman-terslenemeyen(time-irreversible) sistemler için kullanılamazlar. Bu nedenle reel kısmı pozitif olan kompleks katsayılı parçalama metodları ve reel pozitif katsayılı ekstrapolasyon tekniği ile üretilmiş metodlar uygulanmıştır. Eğer sistem tam olarak çözülebilen (ya da sayısal olarak kolayca hesaplanabilen) problemin perturbasyonu olarak düşünülürse, Burgers' tipi denklemlere oldukça etkili metodlar uygulanabilir. Bir kümesi reel ve pozitif katsayılardan oluşan kompleks katsayılı metodların, yani $a_i \in \mathbb{R}^+$ ve $b_i \in \mathbb{C}^+$, ve düşük mertebe parçalama metodları kullanılarak ekstrapolasyon tekniği ile elde edilen metodların Burgers' tipi denklemler için oldukça hassas çözümler ürettiği sayısal örneklerde gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Burgers' tipi denklemler, Parçalama metodları, Ekstrapolasyon metodları, Kompleks katsayılar, Ayrık Fourier Dönüşümü.

ABSTRACT

ON THE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE BURGERS' TYPE PARTİAL DİFFERENTİAL EQUATİONS WİTH HİGH ORDER SPLİTTİNG METHODS

SEYDAOĞLU, Muaz

Ph.D. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ

Mart 2015, 62 pages

In this thesis, high order splitting methods have been used for calculating the numerical solutions of the Burgers' type partial differential equations in one space dimension with different boundary conditions. However, splitting methods with real coefficients of order higher than two necessarily have negative coefficients and can not be used for time-irreversible systems, such as Burgers' type equations, due to the time-irreversibility of the Laplacian operator. Therefore, the splitting methods with complex coefficients having positive real parts and extrapolation methods with real and positive coefficients have been employed. If we consider the system as the perturbation of an exactly solvable problem (or can be easily approximated numerically), it is possible to employ highly efficient methods to approximate Burgers' type equations. The numerical results show that the methods with complex time steps having one set of coefficients real and positive, say $a_i \in \mathbb{R}^+$ and $b_i \in \mathbb{C}^+$, and high order extrapolation methods derived from a lower order splitting method produce very accurate solutions of the Burgers' type equations.

Key Words Burgers' type equations, Splitting methods, Extrapolation methods, Complex coefficients, Discrete Fourier Transform.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince çalışmalarımda bilgi ve görüşlerinden yararlandığım tez danışmanım Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ'e, izleme ve sınav jürilerinde bulunan değerli ögretim üyeleri Prof. Dr. Emine MISIRLI'ya, Prof. Dr. Gamze TANOĞLU'na ve Prof. Dr. Pınar DÜNDAR'a , benimle bilgi, tecrübe ve sevgilerini paylaşan Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Prof. Dr. Alaattin ESEN'e, Prof. Dr. Sergio BLANES'e, Yard. Doç. Dr. Utku ERDOĞAN'a ve Dr. Philip BADER'e, arkadaşlarıma ve bugünlere gelmemde maddi ve manevi hiçbir destekten kaçınmayan ve her zaman bana arkamda olduklarını hissettiren annem Şadiye SEYDAOĞLU'na, babam Abdurrahman SEYDAOĞLU'na, eşim Ayla SEYDAOĞLU'na ve kardeşlerim Usame SEYDAOĞLU'na ve Sümeyye SEYDAOĞLU DEMİREL'e ve yüzümü güldüren canım yeğenim Melek DEMİREL'e şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vii
ABSTRACT ix
TEŞEKKÜR xi
ŞEKİLLER DİZİNİ xv
ÇİZELGELER DİZİNİ xvii
1 GİRİŞ 1
2 ÖN BİLGİLER 5
2.1 Uygulama Örnekleri 5
2.1.1 Doğrusal Adveksiyon Denklemi 5
2.1.2 Viskozitesiz (Inviscid) Burgers' Denklemi 6
2.1.3 Difüzyon Denklemi 7
2.1.4 Viskoziteli (Viscid) Burgers' Denklemi 7
2.1.5 Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' Denklemi 8
2.1.6 Viskoziteli Rosenau-Burgers' Denklemi 8
3 UZAY AYRIKLAŞTIRMA METODLARI 11
3.1 Sonlu Farklar Yöntemi 11
3.1.1 WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) sonlu fark metodları 15
3.2 Spektral Metodlar 17
3.2.1 Yarı Ayrık Fourier Dönüşümü 18
3.2.2 Ayrık Fourier Dönüşümü 21
4 ZAMAN AYRIKLAŞTIRMA METODLARI 29
4.1 Euler Metodu 29
4.2 Yamuk Kuralı 31
4.3 Theta Metodu 32
4.4 Açık Runge-Kutta Metodları 32
5 PARÇALAMA METODLARI 37
5.1 Ekstrapolasyon tekniği ile türetilmiş parçalama metodları 40
5.2 Perturbe edilmiş denklemler için parçalama metodları 40
6 SAYISAL SONUÇLAR 43

İÇİNDEKİLER(DEVAM)

Sayfa

7 SONUÇ 55
KAYNAKLAR DİZİNİ 57
ÖZGEÇMİŞ 62

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1 Örtüşme örneği. $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$ ızgara bölgesi üzerinde $exp(6\pi ix)$ (düz çizgi, üst panel) ve $exp(-10\pi ix)$ (düz çizgi, alt panel) fonksiyonları $exp(-2\pi ix)$ (kesikli çizgi) fonksiyonuna eşit olur 19

3.2 Izgara noktları 21

3.3 Viskozitesiz Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri. 23

3.4 Viskoziteli Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri. 25

3.5 Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri. 26

3.6 Viskoziteli Rosenau-Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri. 27

6.1 $\nu = 0.03$ (sol panel) ve $\nu = 0.003$ (sağ panel) için Örnek 1'in $t = 1$'de sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı. 47

6.2 $N = 512$, $k = 0.01$, $\nu = 0.03$(sol panel) için SM4 ve $\nu = 0.003$(sağ panel) için efektif (6,4) metodları ile Örnek 1'nin farklı zamanlardaki çözümleri. 47

6.3 $\nu = 0.1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01$ (sağ panel) için Örnek 2'in $t = 1$(üst satır), $t = 3$ (alt satır) zamanlarında sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı. 49

6.4 $\nu = 0.1$(sol panel), $\nu = 0.001$(sağ panel), $h = 0.0125$, $k = 0.01$ değerleri için Örnek 2'nin EXT6 metoduyla farklı zamanlardaki çözümleri. 49

6.5 $\nu = 0.1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01$ (sağ panel) için Örnek 3'ün $t = 1$(üst satır), $t = 3$ (alt satır) zamanlarında sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı. 50

ŞEKİLLER DİZİNİ(DEVAM)

Şekil **Sayfa**

6.6 $\nu = 0.1$(sol panel), $\nu = 0.001$(sağ panel), $h = 0.0125$, $k = 0.01$ değerleri için Örnek 3'ün EXT6 metoduyla farklı zamanlardaki çözümleri. 51

6.7 $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$ (sağ panel) için Örnek 4'ün $t = 1$'de sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı. 52

6.8 $N = 512$, $k = 0.01$, $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) için O4 ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$(sağ panel) için efektif (6,4) metodları ile Örnek 4'ün farklı zamanlardaki çözümleri. 52

6.9 $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$ (sağ panel) için Örnek 5'in $t = 1$'de sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı. 53

6.10 $N = 512$, $k = 0.01$, $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) için O4 ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$(sağ panel) için efektif (6,4) metodları ile Örnek 5'nin farklı zamanlardaki çözümleri. 53

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

4.1 Açık Runge–Kutta metodu için Butcher tablosu. 34

6.1 "BAB" kalıbına sahip Parçalama metodlarının katsayıları. 45

1 GİRİŞ

Bu çalışmada

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}), \end{aligned}$$

sırasıyla Viskoziteli Burgers', Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' ve Viskoziteli Rosenau-Burgers' denklemlerinin, $u(x,0)=u_0(x)$ başlangıç koşulu ile birlikte yüksek mertebeden parçalama metodu ile sayısal integrasyonu ele alınmıştır. Burada t, zaman değişkenidir x, uzayı değişkenidir $\nu > 0$, $Re = 1/\nu$ biçiminde Reynold sayısı ile ilişkili kinematik viskozite parametresidir ve β ise pozitif reel sayıdır. Yukarıdaki denklemler arasında en çok bilinen viskoziteli Burgers' denkleminin denge durumu çözümleri ilk olarak (Bateman, 1948) tarafından verilmiştir. Bu denklem Burgers' (Burger, 1948) tarafından türbülansın matemetik modellenmesinde kullanılmıştır. Daha sonra gaz dinamiği, şok dalgaların modellenmesi, tarfik akışları ve sürekli stokastik süreçler gibi birçok farklı uygulama alanında bu denklemden faydalanılmıştır. Öte yandan Burgers' denkleminin çözümleri Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla bulunabilir ve çözümler Fourier seri cinsinden yazılabilir (Hopf, 1950; Cole, 1951). Farklı başlangıç değerleri için Burgers' denkleminin çözümleri (Benton and Platzman, 1972) çalışmasında listelenmiştir. Bazı sınırlı durumlar için Burgers denkleminin çözümleri var olduğundan bu denklem bazı sayısal metodları test etmek için kullanılabilir. Bu yüzden sonlu fark yöntemleri, sonlu eleman yöntemleri, sınır eleman yöntemleri ve spektral yöntemler kullanılarak sayısal çözümü üzerine bir çok çalışma yapılmıştır (Caldwell and Smith, 1982; Evans and Abdullah, 1984; Mitta and Signnal, 1993; Öziş and Özdeş, 1996; Kutluay et al., 1999; Kutluay and Esen, 2004; Hassanien et al., 2005; Liao, 2008; Öziş and Erdoğan, 2009; Öziş et al., 2005). (Jain and Raja, 1979) çalışmasında Burgers' denklemi, konveksiyon ve difüzyon kısmı olarak iki alt denkleme parçalanıp her biri sonlu fark yöntemleri ile ardışık çözülmüştür ve bu yöntem "parçalama tekniği (splitting-up technique)" olarak adlandırılmıştır. Benzer strateji ile (Jain and Holla, 1978) çalışmasında

kübik spline metodu kullanılmıştır ve "iki-zaman-seviyeli parçalama (two-time-level splitting)" olarak adlandırılmıştır. (Jain et al., 1992) çalışmasında ise Burgers' denklemi 3 alt denkleme parçalanıp kübik spline metodu ile yeni bir algoritma önerilmiştir ve "üç-zaman-seviyeli parçalama (three-time-level splitting)" olarak adlandırılmıştır. Kuintic B-spline kollokasyon prosedürü yardımı ile Burgers' ve modifiye edilmiş Burgers' denkleminin zaman ve uzay parçalama teknikleri ile çözümleri de (Saka and Dag, 2008) çalışmasında bulunabilir.

Öte yandan (Holden et al., 1999) çalışmasında genelleştirilmiş Kortweg-De Vries(KdV) denklemine Godunov ve Strang parçalama metodları uygulanıp, her iki metodun da yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Sobolev uzayındaki, iyi konumlanma(well-posedness) teoremi kullanılarak KdV denklemi için (Holden et al., 2011) ve bazı Burgers nonlineerliğe sahip denklemler için ise (Holden et al., 2013) çalışmalarında Godunov ve Strang parçalama metodları uygulanarak yeni bir analitik yaklaşım sunulmuştur. Burgers' nonlineerliğe sahip denklemlerin nonlineerlik ve katılık(stiffness) özelliğinden dolayı yakın zamana kadar uygulanan metodların çoğu düşük mertebeye sahiptir. Katı(Stiff) kısmi diferansiyel denklemler için yüksek mertebeden hassasiyete sahip çözümler elde etmek için (Kassam and Trefethen, 2005) çalışmasında 4. mertebe modifiye edilmiş üstel zaman-farklılaştırma (Exponential time-differencing) metodu sunulmuştur.

Bu çalışmada Burgers' nonlineerliğe sahip denklemlerin yüksek mertebeden kompleks katsayılı parçalama metodları ve ekstrapolasyon teknikleri ile sayısal integrasyonu düşünülmüştür. Bu tür prosedürler terslenemeyen sistemleri integre etmeye izin vermektedir. Kompleks katsayılı parçalama metodları yakın bir zamanda otonom ve nonotonom parabolik denklemleri integre etmek için (Blanes et al., 2013a; Castella et al., 2009; Hansen and Ostermann, 2009; Seydaoğlu and Blanes, 2014) çalışmalarında sunulmuştur. Burgers' tipi denklemlerin bir çoğu küçük vizkosite parametresi ν'yü barındırdığından, pertürbe edilmiş tam olarak çözülebilir (ya da sayısal olarak kolayca yaklaşılabilir) problemler için türetilmiş metodlar da kullanılabilir. Genellikle küçük parametre ν'nün varlığı sayısal metodlar için aşılması gereken bir engel olarak görülmektedir. Ancak pertürbe edilmiş sistemler için geliştirilen parçalama metodları ν'nün varlığını avantaja çevirmektedir.

(Blanes and Casas, 2005; Goldman and Kaper, 1996; Sheng, 1989; Suzuki, 1990) çalışmalarında 2. mertebeden büyük reel katsayılı parçalama metodlarının negatif katsayı içerdiği gösterilmiştir ve dolayısıyla bu metodlar Burgers' tipi denklemlere uygulanamazlar. Bundan dolayı bu çalışmada, pozitif reel kısma sahip kompleks katsayılı ve düşük mertebe parçalama metodlarına ekstrapolasyon tekniği uygulanarak elde edilmiş pozitif reel katsayılı parçalama metodlarından faydalanılmıştır. Burgers' tipi denklemlerin periyodik sınır koşulları için uzay ayrıklaştırma tekniklerinden spektral metodlar kullanılmıştır. Ayrıca, sonlu fark metodları ve WENO sonlu fark metodları yardımı ile Dirichlet sınır koşulları ile verilen Burgers' denkleminin uzay ayrıklaştırılması yapılmıştır.

Yukarıdaki gelişmeler izlenerek hazırlanan bu çalışmanın ikinci bölümünde sonraki bölümler için gerekli bilgiler verilmiştir.

Bölüm 3' te uzay ayrıklaştırma metodları hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışma boyunca ortaya çıkabilecek denklemler için uygulamalar sunulmuştur.

Bölüm 4' te bu çalışma boyunca kullanılan zaman ayrıklaştırma metodları gösterilmiştir.

Bölüm 5' te parçalama metodlarına değinilmiş ve bu çalışmada Burgers' tipi denklemlere uyguladığımız metodlar hakkında bilgi verilmiştir.

Bölüm 6' da Burgers' tipi denklemlere uzay ayrıklaştırma ve parçalama metodları uygulanmış ve elde edilen sayısal çözümler değerlendirilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

2.1 Uygulama Örnekleri

Bu kısımda, gelecek bölümlerde değinilecek çeşitli zaman ve uzay ayrıklaştırma metodlarının basit uygulamalarını göstereceğimiz kısmi diferansiyel denklem(KDD) örnekleri verilmiştir.

2.1.1 Doğrusal Adveksiyon Denklemi

İlk olarak doğrusal adveksiyon denklemini göz önüne alalım. Bu denklem, a sabit olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + a\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem ile $x \in (-\infty, \infty)$ bölgesi üzerinde ki Cauchy problemi, $t \geq 0$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2.2}$$

başlangıç değeri ile tanımlanır. Bu denklemin çözümü $t \geq 0$ için

$$u(x,t) = u_0(x - at), \tag{2.3}$$

şeklinde verilir. Zaman ilerledikçe, başlangıç değerleri a hızıyla, $a > 0$ ise sağa doğru veya $a < 0$ ise sola doğru değişmeden ilerler. Dolayısıyla $u(x,t)$ çözümü, her bir $x - at = x_0$ doğrusu boyunca sabittir ve bu doğru denklemin karakteristiği olarak bilinir. Karakteristikler $x - t$ düzlemi üzerinde, $x'(t) = a$, $x(0) = x_0$ adi diferansiyel denklemini sağlayan eğrilerdir (LeVeque, 1992). $u(x,t)$ fonksiyonunun karakteristik üzerindeki değişim oranını bulmak için, $u(x,t)$'nin bu eğrilerin bir tanesi üzerinde türevini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t),t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t)x'(t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla u fonksiyonunun bu karakteristikler üzerinde sabit olduğu açıkça görülür.

Daha genel olarak, değişken katsayılı adveksiyon denklemi, $a(x)$ düzgün fonksiyon olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)u(x,t)) = 0, \tag{2.4}$$

biçimindedir. (2.4) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)(u(x,t)) = -a'(x)u(x,t), \tag{2.5}$$

Buradan u'nun evolüsyonunun,

$$x'(t) = a(x(t)), \tag{2.6}$$

$$x(0) = x_0,$$

denklemini sağlayan herhangi bir $x(t)$ eğrisi boyunca

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x(t),t)) = -a'(x)u(x(t),t), \tag{2.7}$$

adi diferansiyel denklemini sağladığı görülür. (2.6) ile verilen denklem karakteristikler olarak adlandırılır. Bu durumda $u(x,t)$ çözümü bu eğriler boyunca sabit değildir (LeVeque, 1992).

2.1.2 Viskozitesiz (Inviscid) Burgers' Denklemi

Doğrusal adveksiyon denkleminde taşınım hızı $a(x)$ yerine $\frac{1}{2}u(x)$ seçilirse

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x(t),t)) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}u(x(t),t))^2 = 0, \tag{2.8}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x(t),t)) + u(x(t),t)\frac{\partial}{\partial x}(u(x(t),t)) = 0,$$

şeklinde doğrusal olmayan denklem elde edilir. Bu denklem içinde viskoz terimi içermediğinden viskozitesiz Burgers' denklemi olarak adlandırılır (LeVeque, 1992). Düzgün başlangıç değerine sahip (2.8) denkleminin küçük zaman değeri için çözümü aşağıdaki karakteristikler yardımıyla oluşturulur. Karakteristikler

$$x'(t) = u(x(t),t), \tag{2.9}$$

denklemini sağlar. Çözümün zamana göre türevi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(x(t),t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t)x'(t)\\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\\ &= 0\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Dolayısıyla zaman ilerledikçe u çözümü her bir karakteristik boyunca sabit kalır ve (2.9) denkleminden $x'(t)$ eğimi de sabittir.

Böylece karakteristikler başlangıç değeri ile tanımlanmış düz çizgiler olur. Bu karakteristiklerin çakışmadığı durumlarda düzgün başlangıç değeri kullanılarak yeterince küçük zaman değeri için $u(x(t),t)$ çözümü belirlenebilir. Her bir (x,t) değerleri için

$$x(t) = \zeta + u(\zeta,0)t$$

denklemini ζ değeri için çözersek

$$u(x,t) = u(\zeta,0)$$

elde edilir (LeVeque, 1992).

2.1.3 Difüzyon Denklemi

Bir boyutlu difüzyonun temel diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x(t),t) \tag{2.10}$$

biçimindedir. Burada $u(x(t),t)$, x, t ve α sırasıyla difüzyon gösteren maddenin yoğunluğu, uzay koordinatı, zaman koordinatı ve difüzyon katsayısı olarak adlandırılırlar. (2.10) bir boyutlu difüzyon denkleminin

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

başlangıç koşulu ile verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x,t) = \int_R u_0(\xi)K(x-\xi,t)d\xi, \qquad x \in \mathbb{R},$$

biçimindedir. Burada difüzyon çekirdeği olarak adlandırılan $K(y,t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$K(y,t) = (4\pi\alpha t)^{-1/2}exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t}\right).$$

Herhangi bir ξ ve $t > 0$ değeri için $K(x-\xi,t)$ çekirdeği (2.10) denkleminin çözümü olur ve difüzyon denkleminin temel çözümü olarak adlandırılır (Logan, 2008).

2.1.4 Viskoziteli (Viscid) Burgers' Denklemi

Burger (Burger, 1948) tarafından çalışılan viskoziteli Burgers denklemi

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = \nu u_{xx}, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.12}$$

biçimindedir. Burada kolaylık olması açısından $\frac{\partial}{\partial t}(u(x(t),t)) = u_t$, $\frac{\partial}{\partial x}(u(x(t),t)) = u_x$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x(t),t) = u_{xx}$ notasyonları kullanılmıştır. Bu denklem viskositesiz burger denklemine $Re = \frac{1}{\nu}$, Reynold sabiti olarak bilinen ν viskozite parametresi ile difüzyon terimi eklenerek elde edilmiştir. (2.12) denkleminin çeşitli başlangıç koşullarına göre Hopf-Cole (Hopf, 1950; Cole, 1951) dönüşümü kullanılarak tam çözümleri Fourier seriler cinsinden ifade edilebilir. Bölüm 2'de bu denklemin çeşitli başlangıç ve sınır koşulları ile verilmiş referans çözümleri hesaplanacak ve bu çözümler bölüm 6'da sayısal metodların doğruluğunu test etmek için kullanılacaktır.

2.1.5 Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' Denklemi

Bu tezde ele alacağımız diğer bir denklem

$$u_t + \beta u_x + (\frac{u^2}{2})_x = \nu u_{xx} + u_{xxt}, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.13}$$

biçimindedir. Burada ν ve β pozitif reel sayılardır. Bu denklemin dispersiv etkisi aşağıda verilen Benjamin-Bona-Mahony denklemi ile aynıdır (Benjamin et al., 1972).

$$u_t + \beta u_x + (\frac{u^2}{2})_x = u_{xxt}, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{2.14}$$

Disipatif etki ise viskoziteli Burgers' denklemi ile aynıdır. Burada viskoziteli Burgers' denkleminde kullanılan notasyonlara dikkat edilir ise $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x(t),t))$ yerine u_{xxt} notasyonu kullanılmıştır. Bölüm 2'de bu denklemin periyodik sınır koşulu ve çeşitli başlangıç koşulu ile verilmiş referans çözümleri hesaplanacak ve bu çözümler bölüm 6'da sayısal metodların doğruluğunu test etmek için kullanılacaktır.

2.1.6 Viskoziteli Rosenau-Burgers' Denklemi

Sonraki uygulama denklemimiz aşağıdaki gibidir.

$$u_t + u_{xxxxt} - \nu u_{xx} + \beta u_x + u u_x = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.15}$$

Burada ν ve β pozitif reel sayılardır. Bu denklemin dispersiv etkisi

$$u_t + u_{xxxxt} + \beta u_x + u u_x = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.16}$$

şeklindeki Rosenau denklemi (Rosenau, 1988) ile aynıdır. Disipatif etki ise viskoziteli Burgers' denklemi ile aynıdır. Burada önceki notasyonlara benzer biçimde $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x(t),t))$ yerine u_{xxxxt} notasyonu kullanılmıştır. Bölüm 2'de ve bölüm 6'da bu denkleme tekrar değinilecektir.

3 UZAY AYRIKLAŞTIRMA METODLARI

Bu bölümde, tez çalışması boyunca kullanacağımız uzay ayrıklaştırma yöntemlerine yer verilmiş ve ilgili kavramlar açıklanmıştır.

3.1 Sonlu Farklar Yöntemi

İlk olarak bir [a,b] aralığında verilmiş herhangi bir $U(x)$ fonsiyonunun türevi olan $\frac{dU(x)}{dt} = U'(x)$ fonsiyonunun bazı x noktaları için yaklaşık olarak hesaplanmasına değineceğiz. x ekseninin h düzgün adım uzunluğu olmak üzere ayrıklaştırılması aşağıdaki gibi verilir.

$$x_n = nh, \qquad (0 \leq n \leq n+1)$$

burada $h = \frac{b-a}{n+1}$ dir. Bu yöntemde amaç, $U(x)$ fonksiyonunun x_n ızgara noktalarında yaklaşık değerlerini hesaplamaktır. Yukarıdaki ayrıklaştırma tekniği göz önüne alınırsa, ileri fark formülü kullanılarak türeve yaklaşım formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U'(x) \approx \frac{U(x+h) - U(x)}{h},$$

Öte yandan türevin geri fark formülü ile yaklaşımı

$$U'(x) \approx \frac{U(x) - U(x-h)}{h},$$

şeklinde olur. Yukarıdaki iki formülün ortalaması alınarak türeve daha duyarlı merkezi fark formülü

$$U'(x) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{U(x+h) - U(x)}{h} + \frac{U(x) - U(x-h)}{h}\right]$$

veya

$$U'(x) \approx \frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h}$$

şeklinde oluşturulur.

Benzer fark yaklaşımları kullanılarak 2. mertebeden türevin, $\frac{d^2U(x)}{dt^2} = U''(x)$, sonlu fark yaklaşım formülleri aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir. İleri fark formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} U''(x) &\approx \frac{U'(x+h) - U'(x)}{h} \\ &\approx \frac{U(x+2h) - U(x+h)}{h^2} - \frac{U(x+h) - U(x)}{h^2} \\ &= \frac{U(x+2h) - 2U(x+h) + U(x)}{h^2} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde geri fark formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} U''(x) &\approx \frac{U'(x) - U'(x-h)}{h} \\ &\approx \frac{U(x) - U(x-h)}{h^2} - \frac{U(x-h) - U(x-2h)}{h^2} \\ &= \frac{U(x) - 2U(x-h) + U(x-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Taylor seri yöntemini kullanarak 2. mertebeden türeve merkezi fark yaklaşımı kolayca elde edilebilir. $U(x+h)$ ve $U(x-h)$ fonksiyonlarının Taylor seri açılımı sırasıyla

$$U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{h^2}{2}U''(x) + \frac{h^3}{6}U'''(x) + \mathcal{O}(h^4).$$

ve

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{h^2}{2}U''(x) - \frac{h^3}{6}U'''(x) + \mathcal{O}(h^4).$$

gibi verilir. Yukarıda verilen iki denklemi taraf tarafa toplarsak 2. mertebeden türev yaklaşımı

$$U(x-h) + U(x+h) = 2U(x) - h^2U''(x) + \mathcal{O}(h^4).$$

veya

$$U''(x) = \frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{3.1}$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki formüllerde görülen "$\mathcal{O}$" sembolü, herhangi bir forksiyonun asimptotik davranışı hakkında bilgi verir. Burada "$\mathcal{O}(h)$" ifadesi hata teriminin h ile orantılı olarak değiştiğini belirtir. Dolayısıyla (3.1) yaklaşımında ortaya çıkan hata terimi $\mathcal{O}(h^2)$, yaklaşımın 2. mertebeden hassasiyete sahip olduğunu göstermektedir (Everstine, 2010).

Şimdi bu formullerin Bölüm 2'de sunulan uygulama örneklerine uygulanmasına değineceğiz.

Doğrusal adveksiyon denklemi

İlk olarak $x \in [0,1]$ aralığında tanımlı (2.2) başlangıç koşulu ile verilmiş (2.1) denklemini periyodik sınır koşulu ile birlikte göz önüne alalım. Burada uzay türevli u_x fonksiyonuna sonlu fark yaklaşımı uygulayarak $U_n(t) \approx u(x_n, t)$ olacak şekilde yarı-ayrık sistem elde edilir. Bu durumda sınır koşulu

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad u'(0,t) = u'(1,t) \tag{3.2}$$

biçimindedir. (2.1) denkleminde u_x türevi yerine geri fark formülü

$$u_x(x,t) = \frac{1}{h}(u(x,t) - u(x-h,t)) + \mathcal{O}(h)$$

yazılırsa birinci mertebeden upwind fark şeması $U_0(t) = U_n(t)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}U_j(t) = \frac{a}{h}\left(U_{j-1}(t) - U_j(t)\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilir. Benzer biçimde u_x türevi yerine ileri fark formülü

$$u_x(x,t) = \frac{1}{h}(u(x+h,t) - u(x,t)) + \mathcal{O}(h)$$

yazılırsa birinci mertebeden upwind fark şeması $U_1(t) = U_{n+1}(t)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}U_j(t) = \frac{a}{h}\left(U_j(t) - U_{j+1}(t)\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi uzay ayrıklaştırma yöntemi kullanarak başlangıç değerleri $U_j(0) = u(x_j, 0)$ ile verilen n tane doğrusal Adi diferansiyel denklem sistemi oluşturulur. Yarı ayrık (3.3) ve (3.4) denklem sistemleri $U(t) = (U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t))^T$ olmak üzere, $U'(t) = DU(t)$ vektör notasyonu biçiminde ifade edilebilir. Burada $n \times n$ boyutlu D matrisi (3.3) sistemi için

$$D = \frac{a}{h}\begin{pmatrix} -1 & & & & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ve (3.4) sistemi için

$$D = \frac{a}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Öte yandan u_x türevi yerine merkezi fark formülü

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2h}(u(x+h,t) - u(x-h,t)) + \mathcal{O}(h^2)$$

yazılır ise 2. mertebe fark formülü $U_0(t) = U_n(t)$ ve $U_1(t) = U_{n+1}(t)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}U_j(t) = \frac{a}{2h}\left(U_{j-1}(t) - U_{j+1}(t)\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir. $U'(t) = DU(t)$ vektör notasyonu biçiminde yazılırsa D matrisi

$$D = \frac{a}{h}\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 1 \\ 1 & 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & -1 \\ -1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

biçiminde olur. Denklemde bulunan türevler yerine sonlu fark formülleri yazılarak elde edilen D matrisinin elemanları, denklemin tanımlı olduğu sınır koşullarına göre belirlenir. Yukarıda yazdığımız matrisler $x \in [0,1]$ aralığında periyodik sınır koşullarına göre elde edilmiştir (Hundsdorfer and Verwer, 2003). Şimdi diğer sınır koşullarına kısaca değineceğiz.

- Dirichlet sınır koşulu:

  Bu durumda $x \in [0,1]$ için sınır koşulu

  $$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \tag{3.7}$$

  biçiminde verilir. Sonlu fark formüleri uygulanırken $U_0(t) = U_{n+1}(t) = 0$ eşitliği göz önüne alınarak D matrisinin elemanları yukarıdakilere benzer biçimde kolayca oluşturulabilir (Strang, 2007).

- Neumann sınır koşulu:

  Bu durumda $x \in [0,1]$ için sınır koşulu

  $$u'(0,t) = 0, \qquad u'(1,t) = 0, \tag{3.8}$$

  biçiminde verilir. Sonlu fark formüleri uygulanırken $U_0(t) = U_1(t)$ ve $U_n(t) = U_{n+1}(t)$ eşitliği göz ününe alınarak D matrisinin elemanları yukarıdakilere benzer biçimde kolayca oluşturulabilir (Strang, 2007).

Difüzyon denklemi

Şimdi $x \in [0,1]$ uzay aralığında tanımlı (2.11) başlangıç değeri ile verilen (2.10) denklemini (3.2) periyodik sınır koşullarıyla birlikte göz önüne alalım. Denklemin içerisinde bulunan uzaya göre ikinci türeve sahip u_{xx} terimi yerine (3.1) ile verilen 2. mertebe hassasiyete sahip merkezi fark formülü yazılırsa

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{h^2}(u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)) + \mathcal{O}(h^2)$$

denklemi elde edilir. Buradan $U_0(t) = U_n(t)$ ve $U_1(t) = U_{n+1}(t)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}U_j(t) = \frac{\alpha}{h^2}\left(U_{j-1}(t) - 2U_j(t) + U_{j+1}(t)\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.9}$$

biçiminde adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi, $U(0) = u(x, 0)$ başlangıç koşulu olmak üzere $U'(t) = DU(t)$ vektör notasyonu biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla $n \times n$ boyutlu D matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D = \frac{\alpha}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Benzer şekilde u_{xx} türevli terimi yerine sınır koşulları dikkate alınarak diğer fark formülleri yazılmasıyla D matrisleri kolayca oluşturulabilir (Hundsdorfer and Verwer, 2003).

(Griffiths and Schiesser, 2010) kitabında difüzyon denkleminin farklı sınır koşullarına göre çeşitli yüksek mertebeden sonlu fark formülleri elde edilmiştir. Bunlardan bir tanesi, (3.7) Dirichlet sınır koşullarıyla birlikte verilen (2.10) denklemi için elde edilmiş 4. mertebe sonlu fark matrisi

$$D = \frac{1}{12(h)^2}\begin{pmatrix} 45 & -154 & 214 & -156 & 61 & -10 & \ldots & 0 \\ 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \ldots & -10 & 61 & -156 & 214 & -154 & 45 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

biçimindedir.

3.1.1 WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) sonlu fark metodları

WENO metodları parçalı düzgün çözümlerin süreksizlik içerdiği problemler için geliştirilmiştir. Bu tür metodlar şok çözümleri içeren problemler için oldukça başarılı bulunmuşlardır. WENO sonlu fark yöntemlerinin amacı yüksek mertebeden hassasiyet elde etmek ve süreksizliğin olduğu yerlerde osilatörden kurtulmak için uyarlanabilir interpolasyon prosedürünü kullanmaktır

(Shu, 2003). Bu prosedürü kısaca göstermek için aşağıdaki korunum yasası denklemini ele alalım (Shu, 2003, 2009).

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

Burada $\frac{\partial}{\partial t}(u(x(t),t)) = u_t$ ve $\frac{\partial}{\partial x}(f(u(x(t),t))) = (f(u))_x$ notasyonları kullanılmıştır. Bu ayrıklaştırma yönteminde $(f(u))_x$ türevi

$$(f(u))_x|_{x=x_j} \approx \frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2})$$

biçiminde yaklaşık olarak hesaplanır. Burada $\hat{f}_{j+1/2}$ sayısal akı olarak adlandırılır. (Shu, 2003) çalışmasında $f'(u) \geq 0$ durumları için 5. mertebe WENO sonlu fark şeması

$$\hat{f}_{j+1/2} = w_1\hat{f}^{(1)}_{j+1/2} + w_2\hat{f}^{(2)}_{j+1/2} + w_3\hat{f}^{(3)}_{j+1/2} \tag{3.12}$$

biçiminde verilmiştir. Ayrıca 3. mertebe akılar

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{(1)}_{j+1/2} &= \frac{1}{3}f(u_{j-2}) - \frac{7}{6}f(u_{j-1}) + \frac{11}{6}f(u_j) \\
\hat{f}^{(2)}_{j+1/2} &= \frac{-1}{6}f(u_{j-1}) + \frac{5}{6}f(u_j) + \frac{1}{3}f(u_{j+1}) \\
\hat{f}^{(3)}_{j+1/2} &= \frac{1}{3}f(u_j) + \frac{5}{6}f(u_{j+1}) - \frac{1}{6}f(u_{j+2})
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır. (3.12) denklemindeki nonlineer ağırlıklar, lineer ağırlıklar $\gamma_1 = \frac{1}{10}$, $\gamma_2 = \frac{3}{5}$ ve $\gamma_3 = \frac{3}{10}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
w_i &= \frac{\tilde{w}_i}{\sum_{k=1}^{3}\tilde{w}_k} \\
\tilde{w}_k &= \frac{\gamma_k}{(\epsilon + \beta_k)^2}
\end{aligned}$$

biçimindedir. Hesaplamalarda ϵ=10^{-6} olarak alınır. Düzgünlük göstergeleri β_k'lar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{13}{12}\left(f(u_{j-2}) - 2f(u_{j-1}) + f(u_j)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(f(u_{j-2}) - 4f(u_{j-1}) + 3f(u_j)\right)^2 \\
\beta_2 &= \frac{13}{12}\left(f(u_{j-1}) - 2f(u_j) + f(u_{j+1})\right)^2 + \frac{1}{4}\left(f(u_{j-1}) - f(u_{j+1})\right)^2 \\
\beta_3 &= \frac{13}{12}\left(f(u_j) - 2f(u_{j+1}) + f(u_{j+2})\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3f(u_j) - 4f(u_{j+1}) + f(u_{j+2})\right)^2
\end{aligned}$$

İnterpolasyon ilişkileri ve yeniden oluşturma süreçleri hakkında detaylı bilgi için (Shu, 2009) derleme makalesine bakınız. Bu çalışmada bu metod, $f(u) = \frac{u^2}{2}$ alınarak Burgers' denkleminin Dirichlet sınır koşulları ile birlikte sayısal çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Bu yöntem kullanılarak uzay ayrıklaştırması yapıldıktan sonra elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi herhangi bir zaman ayrıklaştırma metodu ile kolayca çözülebilmektedir.

3.2 Spektral Metodlar

Bu yöntemlerde amaç sonlu fark yöntemlerinde olduğu gibi verilen $\{x_j\}$ ızgara noktalar kümesi ve bu noktalardaki fonksiyon değerleri olan $\{U(x_j)\}$ bilgileri kullanılarak $U(x)$ fonksiyonun türevinin yaklaşık olarak hesaplanmasıdır. Bunun için öncelikle sonlu fark yöntemleri yardımı ile spektral metodlar hakkında bilgi verilecektir. Her bir j için $x_{j+1} - x_j = h$ olacak şekilde düzgün ızgara kümesi $\{x_1, \ldots x_n\}$ ve bu kümeye ait her bir noktada fonksiyonun değerler kümesi $\{U_1, \ldots U_n\}$ olsun. U fonksiyonunun x_j noktasındaki türevi $U'(x_j)$'nin yaklaşık değeri w_j olarak tanımlansın. Bölüm (3.1)'de anlatıldığı gibi Taylor seri açılımı kullanılarak ikinci mertebe sonlu fark yaklaşımı

$$w_j = \frac{1}{2h}\left(U_{j+1}(t) - U_{j-1}(t)\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.13}$$

biçimindedir. Eğer problem periyodik ise (3.13) denklemi (3.6) da olduğu gibi vektör notasyonu biçiminde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & & & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

(3.13) ve (3.14) ifadeleri başka bir şekilde yerel interpolasyon teknikleri ve türevleme yardımıyla da elde edilebilir. Bu şekilde $j = 1, 2, \ldots n$ için $p_j(x_{j-1}) = U_{j-1}$, $p_j(x_j) = U_j$ ve $p_j(x_{j+1}) = U_{j+1}$ olacak şekilde mertebesi ≤ 2 olan tek bir polinom p_j oluşturulup türevi alınarak, $w_j = p_j'(x)$ değerleri elde edilir. Gerçekten de verilmiş sabit bir j değeri için p_j polinomu

$$\begin{aligned} c_{-1}(x) &= \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2h^2} \\ c_0(x) &= \frac{-(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{h^2} \\ c_1(x) &= \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{2h^2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$p_j(x) = c_{-1}(x)U_{j-1} + c_0(x)U_j + c_1(x)U_{j+1} \tag{3.15}$$

biçiminde verilir. Bu polinomun türevi alınıp $x = x_j$ de değeri hesaplanırsa (3.13) ifadesi elde edilir. Periyodik problemler için eşit uzunlukta parçalanmış

ızgara üzerinde trigonometrik polinomlar doğal olarak tercih edilir. Sin, Cos ve e^{ikx} serileri kullanılarak elde edilen bu metodlar Fourier metodları olarak adlandırılır (Trefethen, 2000; Hesthaven et al., 2007).

3.2.1 Yarı Ayrık Fourier Dönüşümü

Burada sonsuz ızgara $x_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}$ ızgara noktaları olmak üzere $h\mathbb{Z}$ ile tanımlı olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $U(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\hat{U}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ilx} U(x) dx, \qquad l \in R. \tag{3.16}$$

Burada $\hat{U}(l)$ sayısı U fonksiyonunun dalga sayısı l'deki genlik yoğunluğu olarak yorumlanabilir. Bu şekilde herhangi bir fonksiyonun kendi dalga bileşenlerine ayrılması işlemi Fourier Analizi olarak adlandırılır (Trefethen, 2000).

Benzer şekilde $\hat{U}(l)$ kullanılarak U fonksiyonu

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilx} \hat{U}(l) dx, \qquad x \in R, \tag{3.17}$$

ters Fourier dönüşümü yardımıyla elde edilir. Burada x değişkeni fiziki değişkendir ve l değişkeni ise Fourier değişkenidir ya da dalga sayısıdır. x değişkeni ayrık olduğunda dalga sayısı l sınırlıdır. Fourier dönüşümü ve tersi, x değişkeninin $\mathbb{R}$ yerine $h\mathbb{Z}$ sonsuz ızgara bölgesini kapladığı durumlarda söz konusu olur. Uzay bölgemiz ayrık olduğundan dalga sayısı l değişkeni de $\mathbb{R}$'yi kapsamayacaktır. Bu durum için uygun dalga sayısı bölgesi uzunluğu $\frac{2\pi}{h}$ olan sınırlı bir bölgedir. Bu şekilde $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ aralığı uygun bir seçim olur. Sonuç olarak fiziki uzay ayrık olduğundan Fourier uzayı sınırlıdır ve fiziki uzay sınırsız olduğundan Fourier uzayı süreklidir. (Trefethen, 2000) kitabında bu ilişki aşağıdaki gibi verilmiştir.

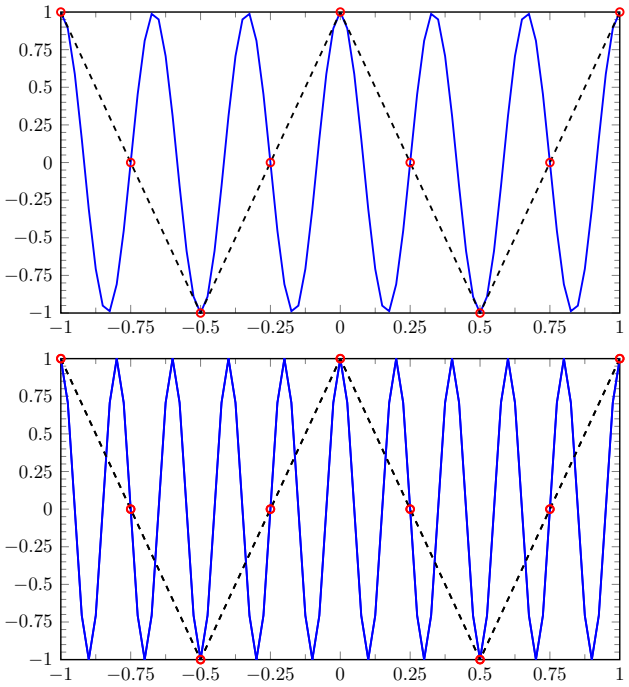
$$\begin{array}{lcccl} \text{Fiziksel uzay} & : & \text{ayrık}, & \text{sınırsız} & : \quad x \in h\mathbb{Z}, \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{Fourier uzayı} & : & \text{sınırlı}, & \text{sürekli} & : \quad k \in [-\dfrac{N}{2}, \dfrac{N}{2}]. \end{array}$$

Bu ilişkiyi oluşturan neden *örtüşme* olgusu olarak bilinir.

- **Örtüşme(Aliasing)**:

  Verilmiş $f(x) = exp(il_1 x)$ ve $g(x) = exp(il_2 x)$ iki kompleks üstel

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu iki fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde $l_1 \neq l_2$ iken birbirine eşit değillerdir. Bu fonksiyonlar $h\mathbb{Z}$ bölgesi üzerine sınırlanır ise ızgara noktalarında $f_j = exp(il_1x_j)$ ve $g_j = exp(il_2x_j)$ değerlerini alırlar. Eğer $l_1 - l_2$ değeri $\frac{2\pi}{h}$ değerinin bir tamsayı katı ise her bir j için $f_j = g_j$ olur. Dolayısıyla herhangi bir $exp(ilx)$ kompleks üstel fonksiyonu için sonsuz $h\mathbb{Z}$ ızgara bölgesi üzerinde birbiriyle eşleşen sonsuz sayıda diğer bir kompleks üstel fonksiyonu vardır. Sonuç olarak dalga sayısını uzunluğu $\frac{2\pi}{h}$ olan bölge üzerinde ölçmek yeterlidir. Simetriden dolayı $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ aralığı seçilir. Şekil 6.1 'de $exp(6\pi ix)$ (üst panel) ve $exp(-10\pi ix)$(alt panel) fonksiyonlarının $exp(-2\pi ix)$ fonksiyonu ile örtüşmesi gösterilmiştir. Yuvarlak noktalar bu fonksiyonların sıkıştırılmış $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$ ızgara bölgesi üzerinde eşit olduğu yerleri belirtir (Trefethen, 2000; Hesthaven et al., 2007).



Şekil 3.1: Örtüşme örneği. $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$ ızgara bölgesi üzerinde $exp(6\pi ix)$ (düz çizgi, üst panel) ve $exp(-10\pi ix)$ (düz çizgi, alt panel) fonksiyonları $exp(-2\pi ix)$ (kesikli çizgi) fonksiyonuna eşit olur .

$h\mathbb{Z}$ bölgesi üzerinde x_j noktalarındaki değeri V_j olacak şekilde tanımlı V fonksiyonunu *yarı ayrık Fourier dönüşümü*

$$\hat{V}(l) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} V_j e^{-ilx_j}, \qquad l \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}], \tag{3.18}$$

ve *ters yarı ayrık Fourier dönüşümü*

$$V_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{V}(l)e^{ilx_j}dl, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.19}$$

biçimdedir. Burada (3.18) denklemi (3.16) denklemine yamuk kuralı uygulanarak elde edilir ve (3.19) denklemi (3.17) denkleminin $\mathbb{R}$'nin $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ kesitindeki yaklaşık değeridir. Spektral türevleme için bir polinoma ihtiyaç duyulur. (3.19) ters dönüşümü $x_j \in h\mathbb{Z}$ yerine $x \in R$ de hesaplanırsa bu polinom elde edilebilir. Gerçekten de $\hat{V}$ belirlendikten sonra, p polinomu her j için $p(x_j) = v_j$ olacak şekilde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{V}(l)e^{ilx}dl, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.20}$$

Bu polinomun Fourier dönüşümü $\hat{p}$

$$\hat{p}(l) = \begin{cases} \hat{V}(l), & ise \quad l \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}] \\ \\ 0, & ise \quad 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

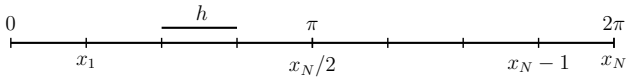
biçimindedir. Bu $\hat{p}$ polinomu $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ aralığında tıkız desteklidir. (Trefethen, 2000) kitabının yazarları $\hat{p}$ 'nin belirli bir aralık olan $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ ' de tıkız destekli olduğunu belirterek p'yi , V'nin band-sınırlı polinomu olarak adlandırmışlardır. Öte yandan herhangi bir ızgara fonksiyonu için sonsuz sayıda bant-sınırlı polinom olmasına rağmen bu anlamda sadece bir bant-sınırlı polinom tanımlanır ve bu sonuç Örnekleme(Sampling Theorem) Teoremi olarak bilinir (Trefethen, 2000).

$h\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlanmış V fonksiyonunun spektral türevi (3.20) ile tanımlı bant-sınırlı p polinomunun türevi alınarak yani $W_j = p'(x_j)$ şeklinde elde edilir. Buna denk yöntem Fourier uzayında da (3.20) ve (3.17) denklemlerinin x'e göre türevlenmesiyle gerçekleştirilebilir. Eğer Fourier dönüşümü $\hat{U}$ ile verilen U fonksiyonu Fourier uzayında türevlenebilen bir fonksiyon ise türevi $\hat{U}'(l) = il\hat{U}(l)$ olur. Dolayısıyla spektral türevleme için denk yöntem aşağıdaki gibi verilir:

- Verilmiş V fonksiyonunun (3.18) denklemi yardımıyla yarı ayrık Fourier dönüşümü $\hat{V}$ belirlenir.
- $\hat{W}(l) = il\hat{V}(l)$ tanımlanır.
- $\hat{W}$ ve (3.19) denklemi kullanılarak W elde edilir.

3.2.2 Ayrık Fourier Dönüşümü

Yarı ayrık Fourier dönüşümleri ile spektral türev sınırsız ızgara $h\mathbb{Z}$ üzerinde hesaplanmasına karşın ayrık Fourier dönüşümleri ile bu hesaplama sınırlı periyodik ızgara üzerinde gerçekleşir. Periyodik ızgaralar bu metodun kullanımını pratik problemler için sınırlasa da hesaplamada çok kullanışlıdır. Bu kısımda periyodik ızgara Şekil (3.2) de gösterildiği gibi $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde düşünülmüştür. Ayrıca bu aralığın $[-\pi, \pi]$ gibi diğer aralıklara dönüştürülmesi işlemlerde önemli derecede bir fark yaratmayacaktır.



Şekil 3.2: Izgara noktları .

Periyodik bölge üzerinde verilmiş bir V fonksiyonu $l, j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $V_{j+lN} = V_j$ eşitliğini sağlar.

(Trefethen, 2000) kitabında periyodik ızgara üzerinde belirlenmiş ızgara noktalarının sayısı N, herzaman çift seçilmiştir. Yazarlar N sayısının tek olarak seçilebildiğini fakat bu durumda formüllerin değişeceğini ve herşeyin iki defa yazılarak formullerin çoğalacağını belirtmişlerdir. Adım sayısı $h = \frac{2\pi}{N}$ olarak seçilir ise

$$\frac{\pi}{h} = \frac{N}{2} \tag{3.22}$$

elde edilir. Örtüşme olayından dolayı h adım uzunluğu ile oluşturulan ızgara bölgesi üzerinde $\frac{2\pi}{h}$ tamsayı çarpanı olacak şekilde değişen dalga sayıları ayırt edilemezler. Bu yüzden $l \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ seçilmesi yeterlidir. (3.22) eşitliği kullanılarak ızgara üzerinde ayırt edilebilen dalga sayılarının bulunduğu aralık $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ yerine $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ olarak seçilebilir. Fiziksel uzayda dalgalar $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde periyodik olması gerekir ve sadece tamsayı dalga sayılarıyla verilen e^{ilx} dalga fonksiyonları 2π periyoda sahiptir. Dolayısıyla Fourier uzayı ayrık ve sınırlıdır. (Trefethen, 2000) kitabında bu ilişki aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{array}{lllll} \text{Fiziksel uzay} & : & \text{ayrık}, & \text{sınırlı} & : \quad x \in \{h, 2h, \ldots, \pi - h, 2\pi\}, \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{Fourier uzayı} & : & \text{sınırlı}, & \text{ayrık} & : \quad l \in \left\{-\dfrac{N}{2}+1, -\dfrac{N}{2}+2, \ldots, \dfrac{N}{2}\right\}. \end{array}$$

Ayrık Fourier dönüşümü

$$\hat{V}_l = h\sum_{j=1}^{N} \hat{V}_j e^{-ilx_j}, \qquad l = -N/2+1, \ldots, N/2, \tag{3.23}$$

biçiminde verilir. Öte yandan ters ayrık Fourier dönüşümü

$$V_j = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \hat{V}_l e^{ilx_j}, \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{3.24}$$

biçimde olur. (3.23) ve (3.24) denklemlerinde dalga sayısı l, uzay indeksi j gibi tamsayı değerleri alır. Dolayısıyla bu denklemler bize sonlu $(V_1, V_2, \ldots, V_N)^T \in \mathbb{C}^N$ vektörleriyle hesaplama yapma imkanı sağlar.

Spektral türev alma işlemi için önceki kısımda olduğu gibi bir bant-sınırlı polinoma ihtiyaç duyulur. Bu polinom ters ayrık Fouirer dönüşümü olan (3.24) denklemini ızgara üzerindeki x noktaları yerine bütün x ler için hesaplayarak elde edilebilir. (3.24) ters dönüşümü hesaplanırsa $e^{iNx/2}$ ve türevi olan $\frac{iN}{2}e^{iNx/2}$ terimleri açıkça görülür. $e^{iNx/2}$ terimi ızgara üzerinde reel ve testere dişi dalgayı ifade eder. Dolayısıyla türevi ızgara noktalarında kompleks üstel yerine sıfır olmalıdır. Asıl sorun (3.24) denkleminin asimetrik olarak en yüksek dalga sayısını yaratmasıdır. (Trefethen, 2000) kitabında bu sorun $\hat{V}_{-N/2} = \hat{V}_{N/2}$ tanımlanarak ortadan kaldırılmıştır. Sonuç olarak (3.24) denklemi

$$V_j(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-N/2}^{N/2}{}'' \hat{V}_l e^{ilx_j}, \qquad j = 1, \ldots, N. \tag{3.25}$$

biçiminde olur ve burada toplam sembolü üzerindeki ($''$) işareti $l = \pm N/2$ terimlerinin $\frac{1}{2}$ ile çarpılması gerektiğini belirtir. Bu denklem kullanılarak bant-sınırlı polinom

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-N/2}^{N/2}{}'' \hat{V}_l e^{ilx}, \qquad x \in [0, 2\pi], \tag{3.26}$$

elde edilir (Trefethen, 2000). Şimdi bu metodların örnekler üzerinde uygulamalarına değinilecektir.

Viskozitesiz (INVISCID) Burgers' denklemi

İlk olarak (2.8) denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin ayrık Fourier dönüşümü

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) = \frac{i}{2}l\widehat{u^2}_l(t), \qquad \hat{u}_l(0) = \hat{u}_{0l}, \tag{3.27}$$

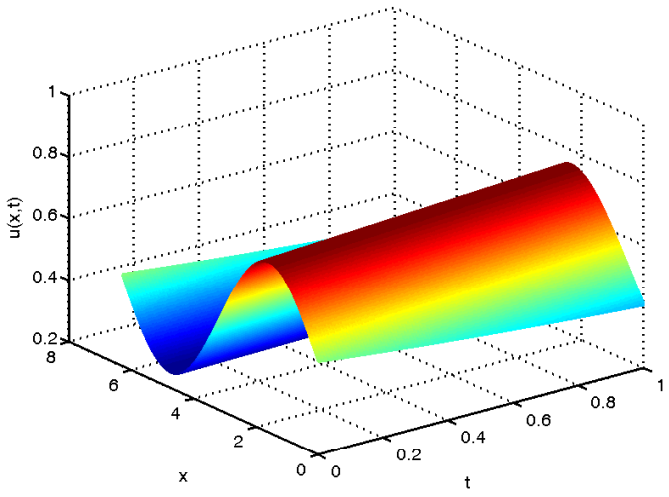
biçiminde olur ve $l = -N/2+1, \ldots, N/2$'dir. Bu denklem $\mathcal{F}$ Fourier dönüşüm operatörü (Trefethen, 2000) olmak üzere

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) = \frac{i}{2} l \mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_l(t)))^2), \qquad \hat{u}_l(0) = \hat{u}_{0l}, \tag{3.28}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu çalışmada (3.28) nonlineer denklemi Bölüm 4'te verilen 4. mertebe açık Runge-Kutta metodu kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. (2.8) denklemini $x \in [0, 2\pi]$, $t > 0$ olmak üzere periyodik sınır koşulları ve

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} sin(x) \tag{3.29}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım. $N = 512$, zaman adımı $k = 0.01$ ve ızgara noktaları $h = \frac{2\pi}{N}$ için denklemin çözümü Şekil 3.3 te x'in ve t'nin fonksiyonu biçiminde gösterilmiştir.



Şekil 3.3: Viskozitesiz Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri.

Difüzyon denklemi

(2.10) ile verilen difüzyon denkleminin ayrık Fourier dönüşümü

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) = -\nu k^2 \hat{u}_l(t), \qquad \hat{u}_l(0) = \hat{u}_{0l}, \tag{3.30}$$

biçimindedir. Bu denklemin çözümü

$$\hat{u}_l(t) = e^{-\nu l^2 t}\hat{u}_{0l}, \qquad l = -N/2+1, \ldots, N/2, \tag{3.31}$$

olur. Görüldüğü gibi difüzyon denkleminin çözümleri verilen başlangıç değeri için yuvarlama hatasına kadar (3.31) biçiminde kolaylıkla elde edilir.

Viskoziteli (VISCID) Burgers' denklemi

(2.12) ile verilen denklemin ayrık Fourier dönüşümü

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) + \frac{il}{2}\widehat{u^2}_l(t) + \nu l^2 \hat{u}_l(t) = 0, \qquad \hat{u}_l(0) = \hat{u}_{0l}, \tag{3.32}$$

biçiminde elde edilir. Denklemin her iki tarafı integrasyon faktörü $e^{\nu l^2 t}$ ile çarpılır ise

$$e^{\nu l^2 t}\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) + \frac{il}{2}e^{\nu l^2 t}\widehat{u^2}_l(t) + \nu l^2 e^{\nu l^2 t}\hat{u}_l(t) = 0, \tag{3.33}$$

olur. Burada $\hat{U}_l = e^{\nu l^2 t}u_l(t)$ biçiminde tanımlanır ise

$$e^{\nu l^2 t}\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) = \frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) - \nu l^2 \hat{U}_l(t), \tag{3.34}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (3.33) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılır ise

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) - \nu l^2 \hat{U}_l(t) + \frac{il}{2}e^{\nu l^2 t}\widehat{u^2}_l(t) + \nu l^2 \hat{U}_l(t) = 0, \tag{3.35}$$

yani

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) + \frac{il}{2}e^{\nu l^2 t}\widehat{u^2}_l(t) = 0, \tag{3.36}$$

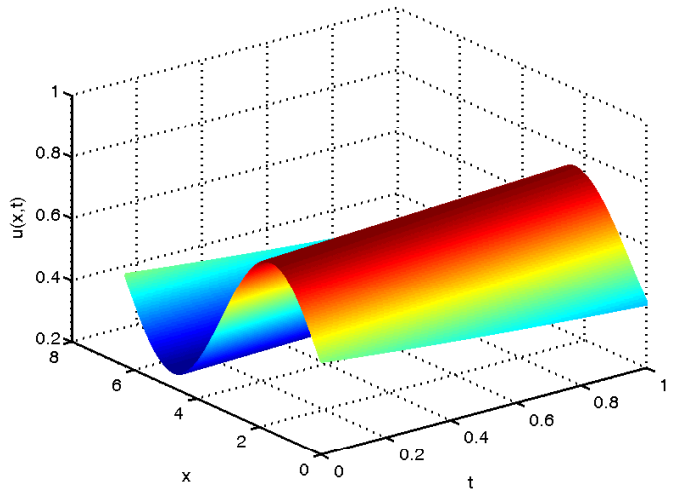
lineer terimi içermeyen denklem elde edilir. Dolayısıyla artık problem katı değildir (Trefethen, 2000). Bu denklem Fourier dönüşüm operatörü yardımı ile

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) + \frac{il}{2}e^{\nu l^2 t}\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\nu l^2 t}\hat{U}_l(t)))^2) = 0, \qquad \hat{u}_l(0) = \hat{u}_{0l}, \tag{3.37}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu nonlineer denklem Bölüm 2'de verilen 4. mertebe açık Runge-Kutta metodu kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. (2.12) denklemini $x \in [0, 2\pi]$, $t > 0$ olmak üzere periyodik sınır koşulları ve

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}sin(x), \tag{3.38}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım. $N = 512$, zaman adımı $k = 0.001$, viskozite $\nu = 0.03$ ve ızgara noktaları $h = \frac{2\pi}{N}$ için denklemin çözümü Şekil 3.4'te x'in ve t'nin fonksiyonu biçiminde gösterilmiştir.



Şekil 3.4: Viskoziteli Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri.

Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' denklemi

(2.13) ile verilen denklemin ayrık Fourier dönüşümü

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) + \frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^2}\hat{u}_l(t) + \frac{il}{2(1+l^2)}\widehat{u^2}_l(t) = 0, \quad \hat{u}_l(0) = \hat{u}_{0l}, \tag{3.39}$$

biçimindedir. Denklemin her iki tarafı integrasyon faktörü $e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}$ ile çarpılır ise

$$e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}\frac{d}{dt}\hat{u}_l + e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^2}\hat{u}_l + e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}\frac{il}{2(1+l^2)}\widehat{u^2}_l = 0, \tag{3.40}$$

elde edilir. Burada $\hat{U}_l(t) = e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}u_l(t)$ şeklinde tanımlanır ve t'ye göre türevi alınır ise

$$e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) = \frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) - e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^2}\hat{u}_l(t),$$

denklemi elde edilir. Bu denklem kullanılarak çeşitli cebirsel işlemler sonucunda (3.40) denklemi

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) = -\frac{il}{2(1+l^2)}e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+k^2}t}\widehat{u^2}_l(t), \tag{3.41}$$

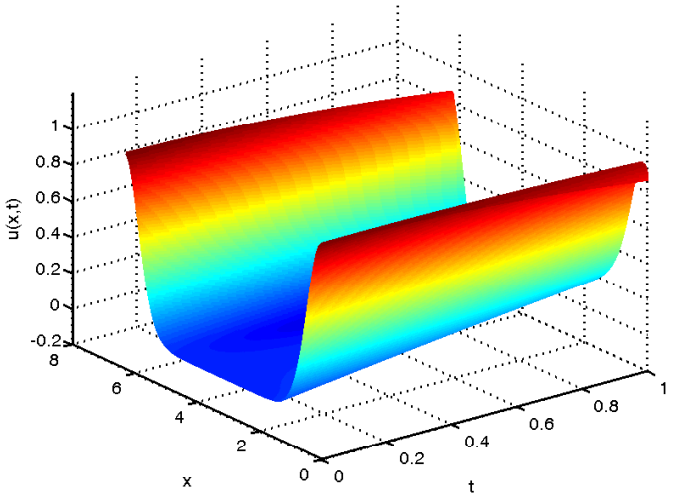
biçiminde olur ve Fourier dönüşüm operatörü cinsinden

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) = -\frac{il}{2(1+l^2)}e^{\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+k^2}t}\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{\nu l^2+i\beta l}{1+l^2}t}\hat{U}_l(t)))^2), \tag{3.42}$$

biçiminde ifade edilir. (2.13) denklemini $x \in [0, 2\pi]$, $t > 0$ olmak üzere periyodik sınır koşulları ve

$$u(x, t = 0) = exp(-10sin(\frac{x}{2})^2), \tag{3.43}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım. $N = 512$, zaman adımı $k = 0.001$, viskozite $\nu = 0.01$, $\beta = 1$ ve ızgara noktaları $h = \frac{2\pi}{N}$ için (2.13) denkleminin , (3.42)'e 4. mertebe açık Runge-Kutta metodu uygulayarak elde edilen çözümleri Şekil 3.5'te x'in ve t'nin fonksiyonu biçiminde gösterilmiştir.



Şekil 3.5: Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri.

Viskoziteli Rosenau-Burgers' denklemi

Son uygulama denklemimiz (2.15)'in ayrık Fourier dönüşümü

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t) + \frac{\nu l^2 + i\beta l}{1 + l^4}\hat{u}_l(t) + \frac{il}{2(1 + l^4)}\widehat{u^2}_l(t) = 0. \tag{3.44}$$

Bu denklem için integrasyon faktörü $e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}$ aşağıdaki gibi uygulanır.

$$e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\frac{d}{dt}\hat{u}_l + e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1 + l^4}\hat{u}_l + e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\frac{il}{2(1 + l^4)}\widehat{u^2}_l = 0. \tag{3.45}$$

Eğer $\hat{U} = e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\hat{u}_l(t)$ biçiminde tanımlanıp zamana göre türevi alınır ise

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) = e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1 + l^4}\hat{u}_l(t) + e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\frac{d}{dt}\hat{u}_l(t), \tag{3.46}$$

olur. Buradan da

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_l(t) = -\frac{il}{2(1 + l^4)}e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\widehat{u^2}_l(t), \tag{3.47}$$

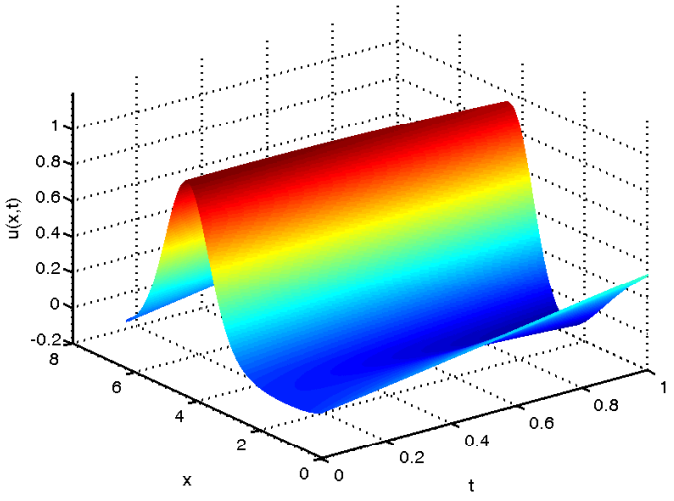
denklemi elde edilir. Bu denklem Fourier dönüşüm operatörü cinsinden

$$\hat{U}_l(t) = -\frac{il}{2(1+l^4)} e^{\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t} \mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{\nu l^2 + i\beta l}{1+l^4}t}\hat{U}_l(t)))^2), \tag{3.48}$$

biçiminde yazılabilir. (3.48) denklemi $x \in [0, 2\pi]$, $t > 0$ ve başlangıç koşulu

$$u(x,0) = exp(-4sin((x+2)/2)^2), \tag{3.49}$$

olmak üzere zaman ayrıklaştırma metodu ile küçük zaman adımları için çözülebilir. $N = 512$, zaman adımı $k = 0.001$, viskozite $\nu = 0.01$, $\beta = 1$ ve ızgara noktaları $h = \frac{2\pi}{N}$ için (2.15) denkleminin, (3.48)'e 4. mertebe açık Runge-Kutta metodu uygulayarak elde edilen çözümleri Şekil 3.6'da x'in ve t'nin fonksiyonu biçiminde gösterilmiştir.



Şekil 3.6: Viskoziteli Rosenau-Burgers' denkleminin son zaman değeri $t = 1$ için Ayrık Fourier dönüşümü ile çözümleri.

4 ZAMAN AYRIKLAŞTIRMA METODLARI

Bu kısımda zaman ayrıklaştırma metodlarının kısmi diferansiyel denklemlere(KDD) uygulanmasından sonra elde edilen adi diferansiyel denklem(ADD) sisteminin çözümlerinde kullanacağımız metodlara değinilmiştir. Bu bölümdeki ayrıklaştırma metodlarının amacı

$$U' = f(t, U), \qquad t \geq t_0, \qquad U(t_0) = U_0 \tag{4.1}$$

biçiminde olan denklem sitemlerinin yaklaşık çözümlerini hesaplamaktır. Burada $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olarak tanımlıdır ve $U_0 \in R^d$ verilen vektör değerli başlangıç değeridir. R^d ise $d-$ boyutlu Reel Öklid Uzayı olarak tanımlanmıştır. Eğer f fonksiyonu, verilmiş herhangi vektör normu $\|.\|$ için

$$\|f(t, V) - f(t, U)\| \leq \lambda \|V - U\|, \quad her \quad V, U \in R^d, t \geq t_0,$$

Lipschitz koşulunu sağlıyor ise (4.1) ile verilen denklem sisteminin tek bir çözümünün var olduğu garanti edilebilir. Öte yandan f fonksiyonu analitik bir fonksiyondur yani bu fonksiyonun $(t, U_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ civarında Taylor seri açılımı pozitif yakınsaklık yarıçapına sahiptir. Bu kısımdaki sayısal metodların bir çoğu Taylor serisi kullanılarak geliştirildiği için f 'in analitiklik özelliği bu açıdan önemli fayda sağlamaktadır (Iserles, 2009).

4.1 Euler Metodu

Bu metod ile yeterince küçük zaman adımı $k > 0$ olmak üzere $t \in [t_0, t_0 + k]$ için $f(t, U(t)) \approx f(t_0, U(t_0))$ yaklaşımı uygulanarak (4.1) denkleminin $U(t)$ çözümünün yaklaşık değeri hesaplanır. (4.1) denkleminin $[t_0, t]$ aralığında integrali alınırsa

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, U(\tau))d\tau \approx U_0 + (t - t_0)f(t_0, U_0), \tag{4.2}$$

elde edilir. $k > 0$ zaman adımı olmak üzere $t_0, t_1 = t_0 + k, t_2 = t_1 + k, \ldots$ dizisi verilsin. $m = 0, 1, \ldots$ için $U(t_m)$ tam çözümünün yaklaşık değeri U_m ile tanımlansın. (4.2) ifadesinden

$$U_1 = U_0 + kf(t_0, U_0),$$

elde edilir. Bu prosedür t_2, t_3 ve diğer noktalar için devam edilirse genel rekürsif şema

$$U_{m+1} = U_m + kf(t_m, U_m), \qquad m = 0, 1, \ldots, \tag{4.3}$$

biçiminde olur ve Euler metodu olarak adlandırılır. Euler denklemi basit bir metod olmasının yanında, daha karmaşık zaman ayrıklaştırma metodlarının türetilmesinde önemli derecede rol almaktadır.

Euler metodunun yakınsaklığını incelemek için önce genel yakınsaklık kavramına değinelim (Iserles, 2009). $[t_0, t_0 + t^*]$ tıkız aralık üzerinde (4.1) denkleminin sayısal hesaplamasını herhangi bir zaman adım metodu ile çözüldüğünü varsayalım. Diğer bir anlamda sayısal çözüm elde etmek için integrasyon aralığı eşit aralıklı ızgara bölgesi üzerinde düşünülerek zaman adım metodları uygulanmış olsun. Asıl soru verilen ızgara bölgesi üzerinde $k \to 0$ iken sayısal çözüm tam çözüme yaklaşıp yaklaşmadığıdır. Formal olarak sayısal çözümlerin k'ya bağlı olması durumu, $U_m = U_{m,k}, \quad m = 0, 1, \ldots, \lfloor t^*/k \rceil$ notasyonu ile gösterilsin.

Tanım 4.1.1 *(Iserles, 2009) Lipschitz fonksiyonu f ile verilen her ADD (4.1) için uygulanan bir metod eğer her $t^* > 0$ olmak üzere*

$$\lim_{h \to 0^+} \max_{m=0,1,\ldots,\lfloor t^*/k \rceil} \|U_{m,h} - U(t_m)\| = 0 \tag{4.4}$$

eşitliğini sağlayor ise bu metod ***yakınsaktır*** *denir.*

Bu yüzden her Lipschitz fonksiyonu için yakınsaklık, uygun ızgara bölgesi üzerinde sayısal çözümünün tam çözüme yaklaşmasıdır. Bu anlamda Euler metodu yakınsaktır (Iserles, 2009). (4.3) denklemi

$$U_{m+1} - [U_m + kf(t_m, U_m)] = 0,$$

formunda yeniden yazılabilir. Burada $j = m, m+1$ olmak üzere U_j sayısal çözümü yerine $U(t_j)$ tam çözüm yazılıp $t = t_0 + mk$ civarında taylor serisine açılıp düzenlenir ise

$$\begin{aligned} U(t_{m+1}) \quad & -[U(t_m) + kf(t_m, U(t_m))] \\ = \quad & [U(t_m) + kU'(t_m) + \mathcal{O}(k^2)] - [U(t_m) + kU'(t_m)] = \mathcal{O}(k^2), \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{O}(h^2)$ terimi Euler metodunun 1. mertebeden bir metod olduğunu belirtir. Genel olarak bir zaman ayrıklaştırma metodunun mertebesi uzay ayrıklaştırma metodundan biraz farklı şekilde tanımlanır.

Tanım 4.1.2 *(Iserles, 2009) (4.1) denklemine uygulanan keyfi zaman ayrıklaştırma metodu*

$$U_{m+1} = \mathcal{U}_m(f, k, U_0, U_1, \ldots, U_m), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

her analitik f fonksiyonu için

$$U(t_{m+1}) - \mathcal{U}_m(f, k, U(t_0), U(t_1), \ldots, U(t_m)) = \mathcal{O}(k^{p+1})$$

eşitliği sağlanıyor ise bu metodun mertebesi p olarak tanımlanır.

Bir sayısal metodun mertebesi yeterince küçük $k > 0$ için t_m'den t_{m+1}'e ilerlerken metodun yerel davranışı hakkında bilgi verir.

4.2 Yamuk Kuralı

(4.2) denklemindeki integral yamuk kuralı ile yaklaşık olarak hesaplanır ise

$$\begin{aligned} U(t) &= U(t_m) + \int_{t_m}^{t} f(\tau, U(\tau))d\tau \\ &\approx U(t_m) + \frac{1}{2}(t - t_m)\left\{f(t_m, U(t_m)) + f(t_{m+1}, U(t_{m+1}))\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla yamuk kuralı

$$U_{m+1} = U_m + \frac{1}{2}k[f(t_m, U_m) + f(t_{m+1}, U_{m+1})], \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilir. Bu metodun mertebesi aşağıdaki gibi $p = 3$ olarak kolayca elde edilebilir.

$$\begin{aligned} U(t_{m+1}) &- \left\{U(t_m) + \frac{1}{2}k[f(t_m, U(t_m)) + f(t_{m+1}, U(t_{m+1}))]\right\} \\ = \quad & [U(t_m) + kU'(t_m) + \frac{1}{2}k^2U''(t_m) + \mathcal{O}(k^3)] \\ - \quad & \left(U(t_m) + \frac{1}{2}k\left\{U'(t_m) + [U'(t_m) + kU''(t_m) + \mathcal{O}(k^2)]\right\}\right) = \mathcal{O}(k^3), \end{aligned}$$

Yamuk kuralı yakınsaktır (Iserles, 2009). Euler metodunda bilinen U_m değeri için sonraki U_{m+1} değeri, f'in değeri hesaplanarak kolayca elde edilebilir. Bundan dolayı açık bir metod olarak tanımlanır. Ancak bu durum Yamuk kuralı için geçerli değildir. (4.5) denkleminde $V = U_m + \frac{1}{2}kf(t_m, U(t_m))$ ifadesi

bilinen değerlerden kolayca hesaplanabilir ancak U_{m+1} değerlerini hesaplamak için

$$U_{m+1} - \frac{1}{2}kf(t_{m+1}, U_{m+1}) = V,$$

cebirsel denklem sistemi çözülmelidir. Bundan dolayı yamuk kuralına kapalıdır denir ve bu özelliği ile açık Euler metodundan farklıdır. Cebirsel sistem çözmek çok maliyetli olduğundan açık metodlar problem çözümlerinde daha çok tercih edilmektedir.

4.3 Theta Metodu

Euler denklemi ve yamuk kuralı birlikte aynı formalizm içinde sırasıyla $\theta = 1$ ve $\theta = \frac{1}{2}$ için

$$U_{m+1} = U_m + k[\theta f(t_m, U_m) + (1-\theta)f(t_{m+1}, U_{m+1})], \quad m = 0, 1, \ldots, \quad (4.6)$$

biçiminde ifade edilebilir. $\theta \in [0, 1]$ olacak biçimde sabit θ değeri için (4.6) denklemi theta metodu olarak adlandırılır. Bu metod $\theta = 1$ için açık diğer durumlarda ise kapalı olur. Taylor seri açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
U(t_{m+1}) \quad & -U(t_m) - k[\theta f(t_m, U(t_m)) + (1-\theta)f(t_{m+1}, U(t_{m+1}))] \\
= \quad & U(t_{m+1}) - U(t_m) - k[\theta U'(t_m) + (1-\theta)U'(t_{m+1})] \\
= \quad & [U(t_m) + kU'(t_m) + \frac{1}{2}k^2U''(t_m) + \frac{1}{6}k^3U'''(t_m)] - U(t_m) \\
- \quad & k\left\{\theta U'(t_m) + (1-\theta)[U'(t_m) + kU''(t_m) + \frac{1}{2}k^2U'''(t_m)]\right\} + \mathcal{O}(k^4) \\
= \quad & (\theta - \frac{1}{2})k^2U''(t_m) + (\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3})k^3U'''(t_m) + \mathcal{O}(k^4).
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan theta metodunun mertebesi $\theta = \frac{1}{2}$(Yamuk kuralı) için $p = 2$, diğer durmlarda $p = 1$ olduğu açıkça görülür.

4.4 Açık Runge-Kutta Metodları

(4.1) adi diferansiyel denklemi t_m'den $t_{m+1} = t_m + k$ integre edilir ise

$$\begin{aligned}
U(t_{m+1}) &= U(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(\tau, U(\tau))d\tau \qquad (4.7) \\
&= U(t_m) + k\int_0^1 f(t_m + k\tau, U(t_m + k\tau))d\tau,
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadede bulunan integral, kuadratür formülü ile yer değiştirilerek

$$U(t_{m+1}) = U(t_m) + k\sum_{j=1}^{s} b_j f(t_m + c_j k, U(t_m + c_j k)), \tag{4.8}$$

metodu elde edilir. Ancak burada $t_m + c_1 k, t_m + c_2 k, \ldots, t_m + c_s k$ noktalarında U değerleri bilinmemektedir ve dolayısıyla bu değerleri hesaplamak için bir yaklaşıma ihtiyaç duyulmaktadır (Iserles, 2009). Her bir $j = 1, 2, \ldots, s$ değerleri için $U(t_m + c_j k)$ yaklaşık değeri k_j ile tanımlansın. (Iserles, 2009) kitabında bir önceki bilinen değeri kullanmak için ilk olarak $c_1 = 0$ seçilerek $k_1 = U_m$ alınmış ve açık Runge-Kutta metodu aşağıdaki gibi sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
k_1 &= U_m \\
k_2 &= U_m + k a_{2,1} f(t_m, k_1) \\
k_3 &= U_m + k a_{3,1} f(t_m, k_1) + k a_{3,2} f(t_m + c_2 k, k_2) \\
&\vdots \\
k_s &= U_m + k\sum_{i=1}^{s-1} a_{s,i} f(t_m + c_i k, k_i) \\
U_{m+1} &= U_m + k\sum_{j=1}^{s} b_j f(t_m + c_j k, k_j)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$A = (a_{j,i})_{j,i=1,2,\ldots,s}$ matrisi Runge-Kutta matrisi olarak adlandırılır ve bu matrisin yazılmayan girdileri sıfır olarak tanımlanır. Diğer taraftan

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix}$$

vektörleri sırasıyla Runge-Kutta ağırlıkları ve noktaları olarak tanımlanır. (4.9) ile verilen metod s-aşamaya sahiptir. Runge-Kutta matrisini belirlemek için Taylor seri açılımından faydalanılır. Örneğin $s = 2$ için

$$\begin{aligned}
f(t_m + c_2 k, k_2) &= f(t_m + c_2 k, U_m + a_{2,1} k f(t_m, U_m)) \\
&= f(t_m, U_m) + k\left[c_2 \frac{\partial f(t_m, U_m)}{\partial t} + a_{2,1} \frac{\partial f(t_m, U_m)}{\partial U} f(t_m, U_m)\right] + \mathcal{O}(k^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (4.9)'da yerine yazılır ise

$$\begin{aligned}
U_{m+1} &= U_m + k(b_1 + b_2) f(t_m, U_m) \\
&+ k^2 b_2 \left[c_2 \frac{\partial f(t_m, U_m)}{\partial t} + a_{2,1} \frac{\partial f(t_m, U_m)}{\partial U} f(t_m, U_m)\right] + \mathcal{O}(k^3)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir ve bu ifade tam çözümün (t_m, U_m) civarındaki Taylor seri açılımı ile karşılaştırılarak mertebe koşulları belirlenir. (4.1) ile verilen denklemden U' bilinmektedir ve dolayısıyla bu denklemin t'ye göre türevi alınır ise

$$U'' = \frac{\partial f(t,U)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,U)}{\partial U} f(t,U)$$

U'' kolayca belirlenebilmektedir. t_m noktasındaki başlangıç koşul U_m olmak üzere t_{m+1} noktasındaki tam çözüm $\tilde{U}$ ile tanımlansın. O halde tam çözümün Taylor seri açılımı

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t_{m+1}) &= U_m + k f(t_m, U_m) \\ &+ \frac{1}{2}k^2 \left[\frac{\partial f(t_m, U_m)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_m, U_m)}{\partial U} f(t_m, U_m) \right] + \mathcal{O}(k^3) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu ifade (4.10) ile karşılaştırılır ise $p \geq 2$ olacak biçiminde mertebe koşulları

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{2,1} = c_2 \tag{4.11}$$

olarak bulunur. Mertebe koşulları kullanılarak belirlenen parametrelerin sistematik bir biçimde sunulması Çizelge (4.1)'de gösterildiği gibi Butcher tablosu olarak adlandırılır.

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	$\cdots$	b_{s-1}	b_s

Çizelge 4.1: Açık Runge–Kutta metodu için Butcher tablosu.

(4.11) koşulları kullanılarak belirlenen parametrelerin en çok bilinenleri aşağıda sunulmuştur.

0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	0	1

,

0		
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

ve

0		
1	1	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

Bunlara ek olarak çok iyi bilinen 3. mertebe

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

ve 4. mertebe

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \tag{4.12}$$

klasik Runge-Kutta metodları biçiminde verilir (Iserles, 2009).

5 PARÇALAMA METODLARI

Bu kısımda, Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin hesaplanması için geliştirilimiş çeşitli parçalama metodlarından bahsedeceğiz. Aynı zamanda bu çalışmada sayısal çözümler elde etmek için kullandığımız parçalama metodlarını sunacağız.

Nonlineer parabolik kısmi diferansiyel denklemini

$$\frac{du}{dt} = \hat{A}(u(t)) + \hat{B}(u(t)), \qquad u(0) = u_0, \tag{5.1}$$

formunda ele alalım. Burada $u(x,t) \in \mathbb{R}^D$, $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve $\hat{A}+\hat{B}$ (sınırsız olabilir) operatörleri sonlu ya da sonsuz Banach uzayı üzerinde pozitif t için C^0 yarı-grupları gererler. İşlemlerde kolaylık olsun diye nonlineer denklem Lie Operatörleri sayesinde (görünüşte) lineer biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + Bu(t), \tag{5.2}$$

burada A, B'ler $\hat{A}, \hat{B}$ ile ilişkilendirlmiş $u(t)$ fonksiyonuna uygulanan

$$A \equiv \hat{A}(u(t))\frac{\partial}{\partial u}, \qquad B \equiv \hat{B}(u(t))\frac{\partial}{\partial u} \tag{5.3}$$

Lie operatorleridirler. (5.2) denkleminin formal çözümü $u(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}u_0$,

$$u(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\hat{A}(u(t))\frac{\partial}{\partial u} + \hat{B}(u(t))\frac{\partial}{\partial u} \right)^k u \Bigg|_{u=u_0}.$$

biçiminde üstel fonksiyonun Taylor seri açılımı yardımı ile kolayca ifade edilebilir. (5.2) denklemini sayısal olarak çözmek için kullanılan parçalama metodunun işleyişi öncelikle denklemi tam(ya da sayısal) olarak çözülebilen

$$\frac{du}{dt} = Au(t) \qquad \text{ve} \qquad \frac{du}{dt} = Bu(t). \tag{5.4}$$

iki ayrı alt denkleme parçalayıp her bir denklemin çözümlerini ayrı ayrı elde etmektir. Nonlineer durumlar için (5.2) denkleminin formal çözümü $\mathrm{e}^{t(A+B)}$, akış dönüşümü(Flow map) $\Phi_t^{(A+B)}$ ile yer değiştirilebilir. Diğer taraftan (5.4) ile verilen her bir denklemin yeterince küçük zaman adımı k için tam k-akışları(flows) Φ_k^A, Φ_k^B (veya e^{kA}, e^{kB}) ile tanımlanabilir. Bu durumda en basit parçalama metodu

$$L_k = \Phi_k^A \circ \Phi_k^B \qquad \text{veya} \qquad L_k = \Phi_k^B \circ \Phi_k^A, \tag{5.5}$$

biçimindedir ve bu metod birinci mertebe *Lie-Trotter parçalama* metodu olarak adlandırılır.

Tanım 5.0.1 *(Hairer et al., 2006) Bir parçalama metodu Ψ_k için*

$$\Psi_k = \Phi_k^{(A+B)} + \mathcal{O}(k^{p+1})$$

eşitliği sağlanıyorsa metodun mertebesi p olarak tanımlanır.

Tanım 5.0.2 *(Hairer et al., 2006) Bir sayısal Ψ_k metodunun adjointi Ψ_k^*, orjinal metodun ters zaman adımı $-k$ ile ters dönüşümü alınarak aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\Psi_k^* = \Psi_{-k}^{-1}$$

Tanım 5.0.3 *(Hairer et al., 2006) Aşağıdaki eşitliği sağlayan bir sayısal Ψ_k metoduna simetriktir denir.*

$$\Psi_k^* = \Psi_k$$

Eğer Lie-Trotter metodunun ve adjointinin $L_k^* = \Phi_k^B \circ \Phi_k^A$ yarı zaman adımı için bileşkesi alınır ise 2. mertebe zamana göre simetrik metodu

$$S_k = \Phi_{k/2}^A \circ \Phi_k^B \circ \Phi_{k/2}^A, \tag{5.6}$$

$$S_k = \Phi_{k/2}^B \circ \Phi_k^A \circ \Phi_{k/2}^B, \tag{5.7}$$

elde edilir ve sırasıyla "ABA" ve "BAB" kalıbına sahip *Strang parçalama* metodu olarak adlandırılırlar. Daha yüksek mertebeden "BAB" kalıbına sahip parçalama metodları

$$\Psi_k = \Phi_{kb_1}^B \circ \Phi_{ka_1}^A \circ \cdots \circ \Phi_{kb_s}^B \circ \Phi_{ka_s}^A \circ \Phi_{kb_{s+1}}^B, \tag{5.8}$$

veya denk olan

$$\Psi_k = \mathrm{e}^{kb_{s+1}B}\, \mathrm{e}^{ka_sA} \cdots \mathrm{e}^{kb_2B}\, \mathrm{e}^{ka_1A}\, \mathrm{e}^{kb_1B} \tag{5.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada s genellikle metodun adım sayısı olarak adlandırılır, $a_1, ..., a_m$ ve $b_1, ..., b_m$ sayıları, istenen mertebeden metoda göre belirlenip seçilen reel ya da kompleks sayılardır (Creutz and Gocksch, 1989) (Suzuki, 1990) (Yoshida, 1990).

Eğer (5.8) ya da buna denk olan (5.9) denklemlerinde $b_1 = b_{s+1} = 0$ seçilirse "BAB" kalıbına sahip parçalama metodu farklı hesaplama maliyet olan "ABA" kalıbına sahip metoda kolaylıkla dönüştürülebilir. (5.8) ve (5.9) denklemlerine dikkat edilir ise indislerin yerinin ve bunlarla birlikte operatörlerin yerini değiştiği görülecektir. Bu değişimin sebebi lineerleştirme işlemi için kullanılan Lie türevlerin etkisi olarak bilinir ve *Vertauschungssatz* olarak adlandırılır (Hairer et al., 2006).

2. mertebeden büyük reel katsıyılı parçalama metodları zorunlu olarak bazı negatif katsayıları içermektedir (Blanes and Casas, 2005). Genel olarak yarı gruplar negatif zaman adımları için iyi tanımlı değildir. C^0 yarı grubunu geren A ve B operatörleri için katsayılar üzerindeki pozitiflik koşulu 2. mertebeden yüksek parçalama metodlarını kullanmayı engellemektedir. Mertebesi 2'den büyük olan pozitif katsayılı parçalama metodları düşük mertebeden parçalama metodları kullanılarak ekstrapolasyon tekniği ile kolayca elde edilebilir. Bu çalışmada Burgers' tipi denklemleri çözmek için ekstrapolasyon tekniği kullanılarak elde edilmiş 4. ve 6. mertebe parçalama metodları kullanılmıştır.

Birbirinden bağımsız olarak (Castella et al., 2009) ve (Hansen and Ostermann, 2009) çalışmalarında, yarı-grup bağlamında 2. mertebeden büyük parçalama metodlarının varlığı ile ilgili açık problem çözülmüştür. Aynı çalışmalarda yazarlar mertebesi 3 ten 14 e kadar olan kompleks katsayılı parçalama metodları sınıfı geliştirmişlerdir ve lineer denklemler için teorik hata sınırı sunmuşlardır. Bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar formal olarak nonlineer denklemler için de bütün üstel ifadeler uygun olan nonlineer akış dönüşümleri ile yer değiştirilerek genişletilebilir. Otonom ve nonotonom durumlar için bazı sayısal sonuçlar (Castella et al., 2009) ve (Seydaoğlu and Blanes, 2014) çalışmalarında sunulmuştur.

Diğer taraftan Burgers' tipi denklemlerde mevcut olan viskozite sayısı gibi bazı fiziksel parametreler, teroik olarak üretilen sayısal metodlar için avantaja çevrilebilir. Bu açıdan bu tip denklemleri çözmek için perturbe edilmiş sistemler için türetilmiş parçalama metodlarını kullanmak daha avantajlı olacaktır. Şimdi ekstrapolasyon tekniği ile elde edilen ve perturbe edilmiş sistemler için türetilen parçalama metodlarına değinilecektir.

5.1 Ekstrapolasyon tekniği ile türetilmiş parçalama metodları

2. mertebeden yüksek parçalama metodları için katsayıların pozitif olma koşulunu aşmak için ekstrapolasyon teknikleri kullanılabilir. Ekstrapolasyon tekniklerinde farklı zaman adımları k için uygulanan basit düşük mertebe integrasyon metodları ile işe başlanır. Daha sonra bu metodların uygun lineer kombinasyonları ile daha yüksek mertebeden metodlar türetilir. Diferansiyel denklemleri çözmek için mertebesi $2p$ olan simplektik integratorlere ekstrapolasyon tekniği uygulanarak türetilmiş bir çok yüksek mertebeden sayısal metodlar (Blanes et al., 1999)'da bulunabilir. Φ_k herhangi bir sayısal metod olmak üzere

$$\Psi_k = \frac{4}{3}\Phi_{k/2} \circ \Phi_{k/2} - \frac{1}{3}\Phi_k, \tag{5.10}$$

ve

$$\Psi_k = \frac{81}{40}\Phi_{k/3} \circ \Phi_{k/3} \circ \Phi_{k/3} - \frac{16}{15}\Phi_{k/2} \circ \Phi_{k/2} + \frac{1}{24}\Phi_k, \tag{5.11}$$

biçiminde ekstrapolasyon metodlarını ele alalım. Eğer Φ_k sayısal metodu 2. mertebe simetrik Strang metodu (5.7) olarak seçilir ise 4. mertebe parçalama metodu

$$\Psi_k = \frac{4}{3}\Phi^B_{k/4} \circ \Phi^A_{k/2} \circ \Phi^B_{k/2} \circ \Phi^A_{k/2} \circ \Phi^B_{k/4} - \frac{1}{3}\Phi^B_{k/2} \circ \Phi^A_k \circ \Phi^B_{k/2}, \tag{5.12}$$

ve 6. mertebe parçalama metodu

$$\begin{aligned}\Psi_k = {} & \frac{81}{40}\Phi^B_{k/6} \circ \Phi^A_{k/3} \circ \Phi^B_{k/3} \circ \Phi^A_{k/3} \circ \Phi^B_{k/3} \circ \Phi^A_{k/3} \circ \Phi^B_{k/6} \\ & - \frac{16}{15}\Phi^B_{k/4} \circ \Phi^A_{k/2} \circ \Phi^B_{k/2} \circ \Phi^A_{k/2} \circ \Phi^B_{k/4} + \frac{1}{24}\Phi^B_{k/2} \circ \Phi^A_k \circ \Phi^B_{k/2},\end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir.

5.2 Perturbe edilmiş denklemler için parçalama metodları

Burgers' tipi denklemler içerisinde bulunan parametreler sayısal metodlar için avantaja çevrilebileceğinden daha önce söz etmiştik. Bu durumda $\hat{A}(u(t))$ operatörü baskın kısım, yani $\|\hat{B}(u(t))\| \ll \|\hat{A}(u(t))\|$ olarak düşünülebilir. O halde (5.2) denklemi

$$\frac{du}{dt} = (A + \epsilon B)u(t), \tag{5.14}$$

olarak yazılabilir ve burada ϵ, $|\epsilon| \ll 1$ olacak biçimde küçük parametredir.

2. mertebe simetrik (5.6) metodunu B'yi ϵB ile yer değiştirerek üstel formda ele alalım. O halde

$$\mathrm{e}^{\frac{k}{2}A}\,\mathrm{e}^{\epsilon k B}\,\mathrm{e}^{\frac{k}{2}A} = \mathrm{e}^{k(A+\epsilon B)-\frac{1}{24}k^3[A,[A,\epsilon B]]+\frac{1}{12}k^3[\epsilon B,[A,\epsilon B]]+\cdots}, \tag{5.15}$$

eşitliği yazılabilir. Burada Lie braket (ya da komutatör) $[.,.]$, (5.3)'te tanımlanan A ve B operatörleri için $[A,B] = AB - BA$ biçiminde tanımlanır. Lie braketler Baker-Campbell-Hausdorff formülünün (Hairer et al., 2006) (5.15) eşitliğinin sol tarafına uygulanmasından ortaya çıkmaktadır. Bu eşitlikten yerel(local) hatanın mertebesinin $\mathcal{O}(\epsilon k^3 + \epsilon^2 k^3)$ olduğu kolayca görülür. Bu hata k ya göre 3. mertebe $\epsilon[A,[A,B]]$ ve $\epsilon^2[B,[A,B]]$ komutatörlerinden kaynaklanmaktadır. Küçük ϵ parametresi $\epsilon \ll h$ veya en azından $\epsilon \approx h$ olarak düşünülebilir (McLachlan, 1995). O halde genel komposizyon (5.9) metodunda B yerine ϵB alınarak baskın hata terimleri k'ya ve ϵ'a göre yok edilebilir. Bu şekilde a_i, b_i katsayıları seçilerek küçük ϵ sayısı avantaja çeviren metodlar geliştirilebilir.

s-aşamalı simetrik BAB kompozisyonu

$$\Psi(k) = \mathrm{e}^{kb_{s+1}\varepsilon B}\,\mathrm{e}^{ka_s A}\,\cdots\,\mathrm{e}^{kb_2\varepsilon B}\,\mathrm{e}^{ka_1 A}\,\mathrm{e}^{kb_1\varepsilon B}, \tag{5.16}$$

burada $a_{s+1-i} = a_i,\ b_{s+2-1} = b_i,\ i = 1,2,\ldots$, ve ABA komposizyonu

$$\Psi(k) = \mathrm{e}^{ka_{s+1}A}\,\mathrm{e}^{kb_s\varepsilon B}\,\cdots\,\mathrm{e}^{ka_2 A}\,\mathrm{e}^{kb_1\varepsilon B}\,\mathrm{e}^{ka_1 A}, \tag{5.17}$$

burada $a_{s+2-i} = a_i,\ b_{s+1-1} = b_i,\ i = 1,2,\ldots$ biçimindedir. Bu durumlarda baskın terimler p_1 göreceli büyük değerler olmak üzere $\mathcal{O}(\epsilon k^{p_1})$ olarak düşünülebilir. Daha sonra küçük ϵ parametresi istenen parçalama metodlarının doğruluk hesaplamasına katılabilir. (p_1,p_2), $p_1 \geq p_2$ olacak şekilde metodun etkin mertebeleri olmak üzere yerel(local) hata $\mathcal{O}(\epsilon k^{p_1+1} + \epsilon^2 k^{p_2+1})$ olur. (McLachlan, 1995) çalışmasında mertebesi $(p_1,2)$, $p_1 \leq 10$ olacak şekilde katsayılar a_i, b_i pozitif olan metodlar ve mertebesi $(p_1,4)$, $p_1 = 8,10$ olacak şekilde çeşitli metodlar sunulmuştur. (Blanes et al., 2013b) çalışmasında ise genelleştirilmiş mertebesi $(p_1,2)$, $p_1 \geq 4$ ve $(p_1,4)$, $p_1 \geq 6$ olacak şekilde simetrik parçalama metodlarının mertebe koşulları Lyndon çoklu-indeksler kullanılarak sunulmuştur ve mertebesi $(p_1,4)$, $p_1 = 8,10$ olan bazı metodlar uygun mertebe koşullarından gelen polinom denklemleri çözülerek elde edilmiştir.

Diğer taraftan çarpma işleminin maliyetli olmasından, kompleks katsayılı parçalama metodları reel katsayılı metodlardan daha maliyetli olmaktadır. Maliyeti düşürerek katsayıların sadece bir kümesi kompleks değerli olan parçalama metodları (Castella et al., 2009; Seydaoğlu and Blanes, 2014) çalışmalarında önerilmiştir. Bunlara ek olarak etkin mertebesi $(6, 4)$ ve a_i ler pozitif ve reel değerli, b_i ler ise reel kısımları pozitif olan kompleks değerli parçalama metodu (Seydaoğlu and Blanes, 2014) çalışmasında elde edilmiştir. Bu son metod nonotonom sistemler için çok etkili ve kararlıdır.

6 SAYISAL SONUÇLAR

Öncelikle Burgers' tipi denklemler için parçalama metodlarının nasıl uygulandığına değinelim.

Viskoziteli Burgers' denklemi

(2.12) ile verilen başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denklem için parçalama metodunun işleyişi, viskozitesiz Burgers' denklemini

$$u_t = -(\frac{u^2}{2})_x, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{6.1}$$

ve difüzyon denklemini

$$u_t = \nu u_{xx}, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{6.2}$$

ardışık olarak çözmektir. Sırasıyla (6.1), (6.2) ile verilen denklemlerin tam çözümünü veren dönüşümler (ya da yeterince hassas sayısal yaklaşımlar) Φ_k^A, Φ_k^B ile verilsin. O halde (2.12) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u(x,k) = \Psi_k u_0(x). \tag{6.3}$$

biçiminde olur. Burada Ψ_k, yeterince küçük zaman adımı k için (5.8)(veya 5.9) ile verilir. Çeşitli sınır ve başlangıç koşulu ile verilen Burgers' denkleminin yüksek mertebeden parçalama metodu ile sayısal çözümleri (Seydaoğlu et al., 2014) çalışmasında sunulmuştur.

Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' denklemi

(2.13) ile verilen denklem aşağıdaki gibi iki alt denkleme parçalanır.

$$u_t - u_{xxt} = -(\frac{u^2}{2})_x, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{6.4}$$

$$u_t - u_{xxt} = \nu u_{xx} - \beta u_x, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{6.5}$$

Daha sonra elde edilen her bir alt denklem ardışık olarak çözülür ve (6.3) biçiminde yaklaşık çözüm elde edilir.

Viskoziteli Rosenau-Burgers' denklemi

Son olarak (2.15) ile verilen denklem

$$u_t + u_{xxxxt} = -(\frac{u^2}{2})_x, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{6.6}$$

$$u_t + u_{xxxxt} = \nu u_{xx} - \beta u_x, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{6.7}$$

biçiminde iki alt denkleme parçalandıktan sonra yukarıdakilere benzer şekilde ardışık olarak çözülür ve yaklaşık çözümler (6.3) biçiminde elde edilir.

Burada parçalama işlemlerinden sonra elde edilen alt denklemlerden biri belirli zaman aralığında başlangıç koşuluna bağlı olarak süreksiz şok çözümleri üretirken diğer denklem her zaman sürekli çözümler üretmektedir. Bu durumda alt denklemlerin çözümlerini birleştirme işlemini açıklamak yararlı olacaktır. (Holden et al., 1999) çalışmasında yeterince düzgün başlangıç değerleri için, şok çözümlere neden olan denklemin parçalama zaman adım uzunluğundan kaynaklanan zaman adımları kontrol altında tutulur ise Strang parçalama metodunun parçalanmamış denklemin düzgün çözümlerine yakınsadığı gösterilmiştir. Diğer bir (Holden et al., 2013) çalışmasında, parçalama prosedürünün yakınsak olduğu varsayımı ile parçalama çözümlerinin parçalanmamış denklemin zayıf(weak) çözümlerine yakınsadığı ispatlanmıştır. Düşük mertebe parçalama metodları bu koşullar altında yakınsaktır ve benzer sonuçlar düzgünlük(smoothness) üzerinde güçlü kabuller kullanarak yüksek mertebeler için de beklenebilmektedir.

Bu tezde sayısal çözümler için kullanılan parçalama metodlarından bahsedelim. Reel katsayılı olan parçalama metodları aşağıda verilmiştir.

- **Strang**: İkinci mertebe simetrik Strang parçalama metodu (5.7);
- **ML(6,2)**: (McLachlan, 1995) çalışmasında perturbe edilmiş sistemler için geliştirilen 2. mertebe simetrik parçalama metodu ;
- **(EXT4)**: 4. mertebe ekstrapolasyon metodu (5.12);
- **(EXT6)**: 6. mertebe ekstrapolasyon metodu (5.13);

Bunlara ek olarak $a_i \in \mathbb{R}^+$ olacak şekilde kompleks katsayılı olan parçalama metodları aşağıdaki gibidir.

- **(RC4)**: (Castella et al., 2009) çalışmasında elde edilen 4 aşamalı 4. mertebe metod ;
- **(O4)**: (Blanes et al., 2013a) çalışmasında elde edilen 4 aşamalı 4. mertebe metod, bu metod `http://www.gicas.uji.es/Research/splitting-complex.html` adresinde bulunabilir;

- **(SM4)**: (Seydaoğlu and Blanes, 2014) çalışmasında perturbe edilmiş sistemler için geliştirilen optimize edilmiş 4-aşamalı 4. mertebe parçalama metodu;
- **(SM(6,4))**: (Seydaoğlu and Blanes, 2014) çalışmasında perturbe edilmiş sistemler için geliştirilen 6-aşamalı 4. mertebe parçalama metodu;

Çizelge 6.1: "BAB" kalıbına sahip Parçalama metodlarının katsayıları.

Efektif $(6,2)$ mertebe metod: ML$(6,2)$	
$b_1 = 1/12$	$a_1 = (5-\sqrt{5})/10$
$b_2 = 5/12$	$a_2 = 1/\sqrt{5}$
$b_3 = b_2,\ b_4 = b_1$	$a_3 = a_1$
4-aşamalı 4. mertebe metod: RC4	
$b_1 = 1/10 - i/30$	$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1/4$
$b_2 = 4/15 + 2i/15$	
$b_3 = 4/15 - i/5$	
$b_4 = b_2,\ b_5 = b_1$	
Optimize edilmiş 4-aşamalı 4. mertebe metod: O4	
$b_1 = 0.060078275263542 + 0.060314841253379i$	$a_1 = 0.1859688195991091314$
$b_2 = 0.270211839133611 - 0.152903932291162i$	$a_2 = 0.3140311804008908686$
$b_3 = 0.339419771205694 + 0.185178182075567i$	$a_3 = a_2,\ a_4 = a_1$
$b_4 = b_2,\ b_5 = b_1$	
Optimize edilmiş 4-aşamalı 4. mertebe metod: SM4	
$b_1 = 0.0183291028610743 64 - 0.10677008344599524i$	$a_1 = 0.13505265889288437$
$b_2 = 0.2784394345454581 + 0.20041452008768607i$	$a_2 = 0.36494734110711563$
$b_3 = 0.40646292518693505 - 0.18728887328338165i$	$a_3 = a_2,\ a_4 = a_1$
$b_4 = b_2,\ b_5 = b_1$	
Efektif $(6,4)$ mertebe metod: SM(6,4)	
$b_1 = 0.05753968253968254 - 0.007886748775536424i$	$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 1/6$
$b_2 = 0.20476190476190473 + 0.04732049265321855i$	
$b_3 = 0.16309523809523818 - 0.11830123163304637i$	
$b_4 = 0.14920634920634912 + 0.15773497551072851i$	
$b_5 = b_3,\ b_6 = b_2,\ b_7 = b_1$	

Yukarıdaki parçalama metodlarının katsayıları Çizelge 6.1'de verilmiştir. Bu metodlar, Viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony-Burgers' ve Viskoziteli Rosenau-Burgers' denklemlerini periyodik sınır koşulları ile Viskoziteli Burgers' denk-

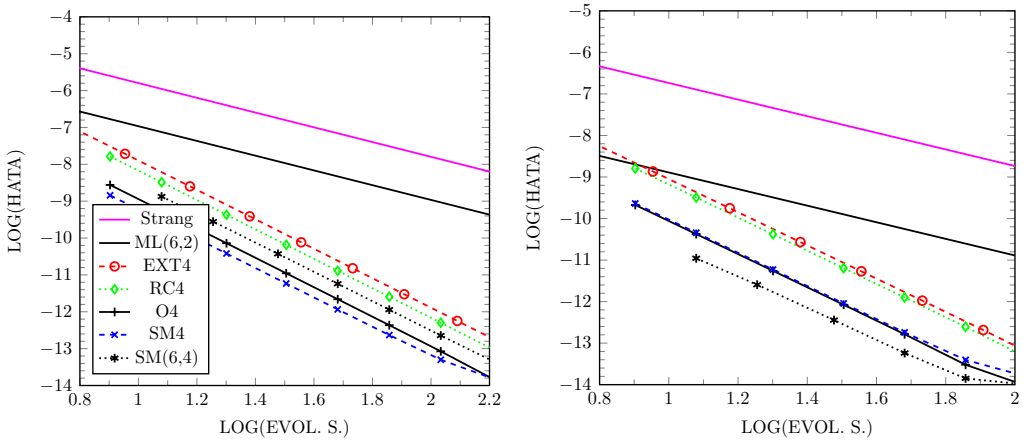
lemini ise hem periyodik hem de Dirichlet sınır koşulları ile birlikte çözmek için kullanılmıştır. Periyodik sınır koşulları ile verilen Burgers' tipi denklemleri çözerken en uygun metodlar simetrik BAB kalıbına sahip, bütün a_i'ler reel ve pozitif değerli, b_i'ler ise pozitif reel kısma sahip kompleks değerli parçalama metodlarıdır. Eğer periyodik sınır koşuları ile verilen denklemler için spektral metodlar ayrıklaştırma tekniği olarak kullanılır ise bu metodlar yani, $a_i \in \mathbb{R}^+$ ve $b_i \in \mathbb{C}^+$, kararlı ve daha az hesaplama maliyetine sahiptir. Dirichlet sınır koşulları durumunda ise bu metodlar sınıfı sonlu farklar ve WENO ayrıklaştırma metodları için kararlı değildir. Bu durumda sadece reel ve pozitif katsayılı parçalama metodları kullanılmıştır. Öte yandan verilmiş kompleks katsayı içeren Ψ_k metodu için sayısal çözümler U_{m+1}, kompleks çözümlerin her bir zaman adımı tamamlandıktan sonra kendi reel kısmına iz düşümü alınarak hesaplanır, yani $U_{m+1} = \Re(\Psi_k U_m)$.

Örnek 1 Bu örnekte (2.12) Burgers' denkleminin

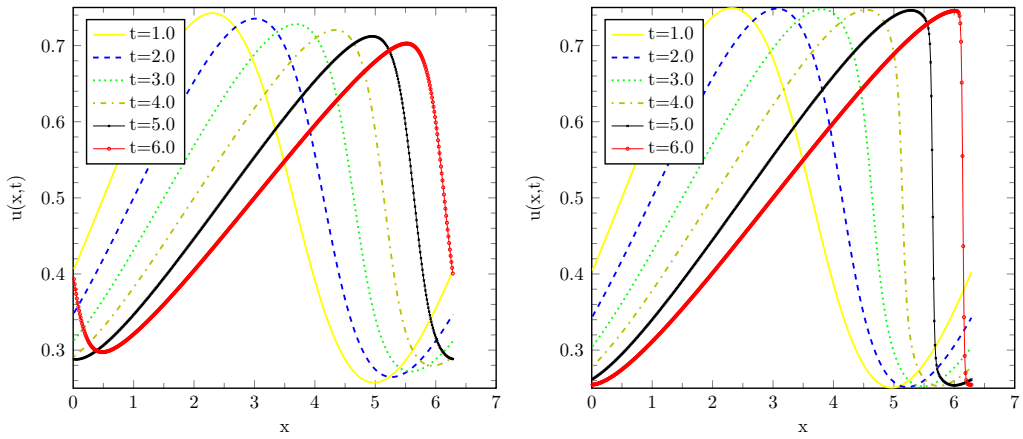
$$u(x, t = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} sin(x) \tag{6.8}$$

başlangıç koşulu ve $[0, 2\pi]$ uzay aralığında periyodik sınır koşulları ile birlikte simülasyonu düşünülmüştür. $\nu = 0.03$, $\nu = 0.003$ ve uzayda Fourier spektral ayrıklaştırma için ızgara noktalarının sayısı $N = 512$ olarak alınmıştır. Tam çözümler (3.2.2)'de gösterildiği gibi integrasyon faktörü metodu kullanılarak yeterince küçük zaman adımları için 4. mertebe açık Runge-Kutta metodu ile elde edilmiştir. Sayısal çözümler için hata, sonsuz norm kullanılarak son zaman değeri için hesaplanmıştır. Şekil 6.1'de $[0, 2\pi]$ zaman aralığında Çizelge 6.1'de verilen parçalama metodlarının hassaslığı karşılaştırılmıştır. Bir çok zaman adımı için fazla maliyet gerektiren Φ_k^A'nın evolüsyon sayısına karşın çözümlerdeki hatalar grafiklerle gösterilmiştir. Bütün metodların p klasik mertebelerinin , grafikteki doğruların eğimi ile uyuştuğu açıkça görülmektedir. Kompleks katsayılı parçalama metodlarının, düşük mertebe pozitif katsayılı metodlardan ve yüksek mertebe ekstrapolasyon metodundan daha hassas sonuçlar verdiği kolayca görülür. Bununla birlikte, standart metodlar küçük parametre ν'ye karşı hassas olmamasına rağmen perturbe sistemler için elde edilen metodların, ν değeri küçüldükçe daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Şekil 6.2'de ise çözümlerin fiziksel özelliğini göstermek için, problemin ν'nün

farklı değerleri için en iyi sonuçları veren parçalama metodları ile farklı zamanlardaki çözümleri verilmiştir.



Şekil 6.1: $\nu = 0.03$ (sol panel) ve $\nu = 0.003$ (sağ panel) için Örnek 1'in $t = 1$'de sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı.



Şekil 6.2: $N = 512$, $k = 0.01$, $\nu = 0.03$(sol panel) için SM4 ve $\nu = 0.003$(sağ panel) için efektif (6,4) metodları ile Örnek 1'nin farklı zamanlardaki çözümleri.

Örnek 2 Bir sonraki örnek için $[0,1]$ uzay aralığında

$$u(x,t=0) = \frac{1}{5} sin(\pi x), \tag{6.9}$$

başlangıç koşulu ve

$$u(x=0,t) = u(x=1,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{6.10}$$

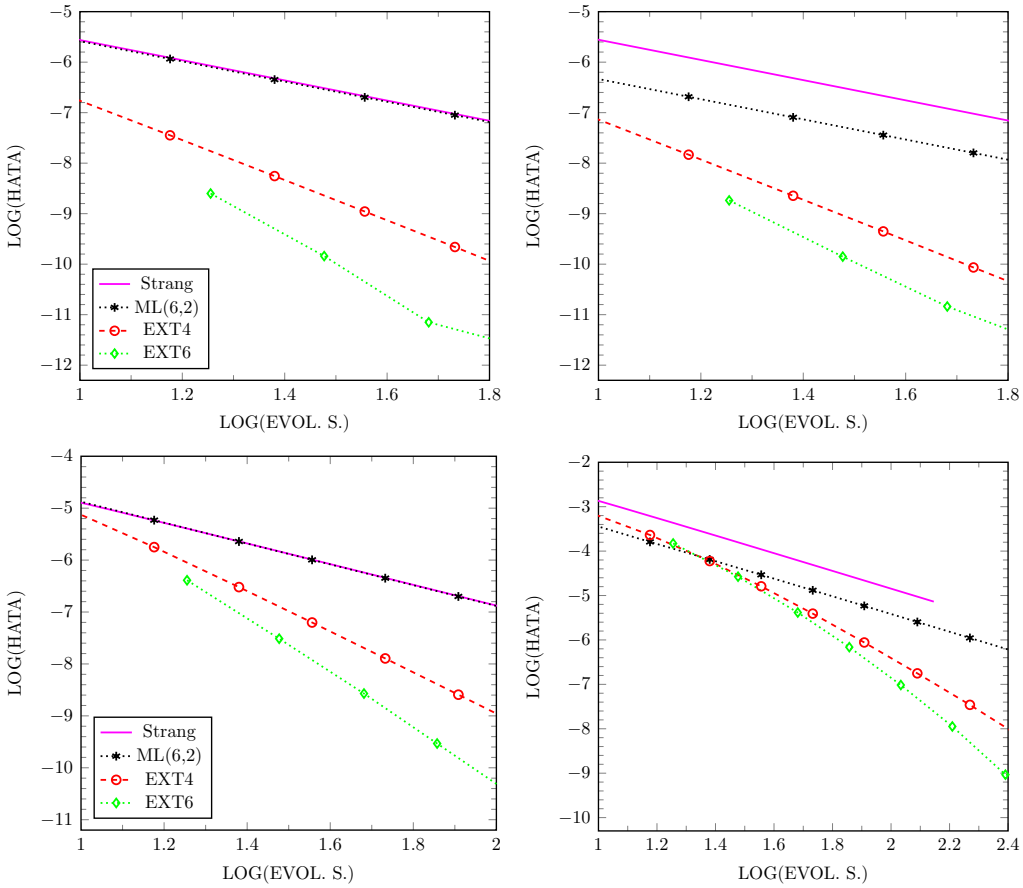
Dirichlet sınır koşulu ile verilen (2.12) denklemi ele alınmıştır. Hopf-Cole dönüşümü kullanılarak bu özel problemin tam çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x,t) = 2\nu\pi \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n exp(-n^2\pi^2\nu t) n sin(n\pi x)}{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n exp(-n^2\pi^2\nu t) cos(n\pi x)}, \tag{6.11}$$

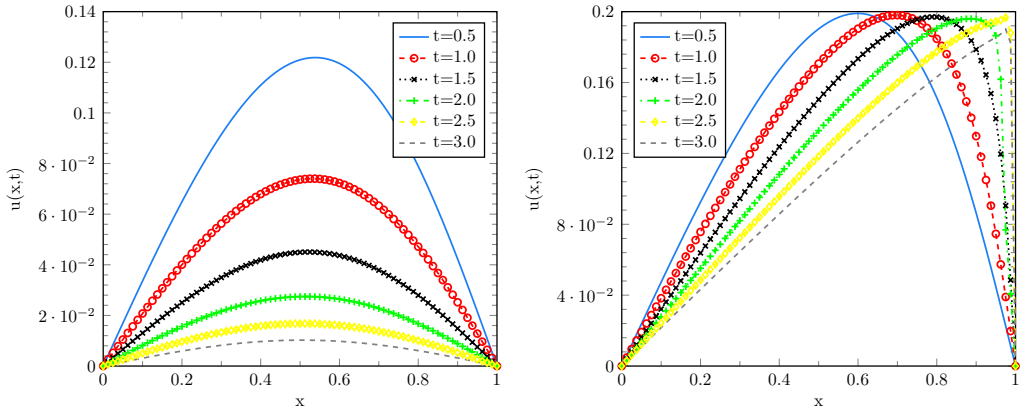
Burada

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 exp\left\{-(10\pi\nu)^{-1}\left[1 - cos(\pi x)\right]\right\} dx, \\ c_n &= 2\int_0^1 exp\left\{-(10\pi\nu)^{-1}\left[1 - cos(\pi x)\right]\right\} cos(n\pi x) dx \qquad (n = 1,2,3\ldots) \end{aligned}$$

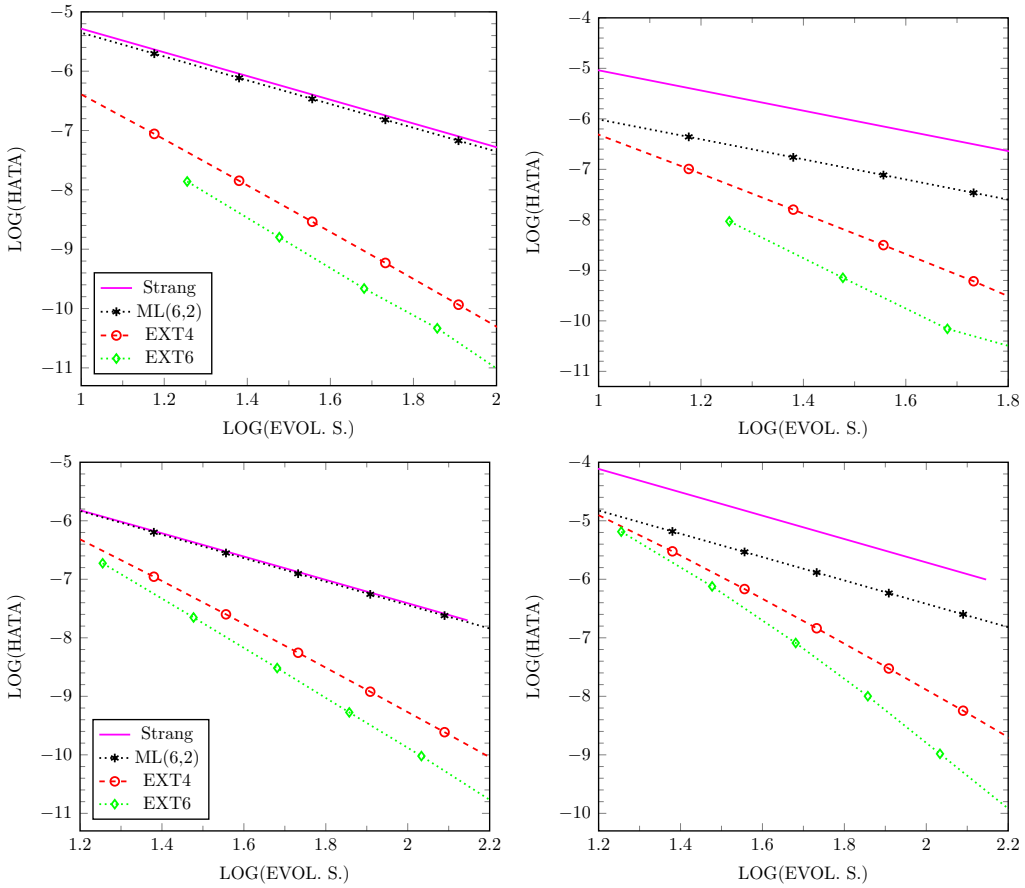
dir. $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$ ve bölüm (3.1)'de (3.11) ile verilen ayrık difüzyon matrisinin boyutu $D = 500$ olarak seçilmiştir. Sayısal çözümlerdeki hatalar, (6.11) tam çözümleri yardımı ile son zaman değerleri $t = 1$, $t = 3$'te Çizelge 6.1'de verilen parçalama metodları için sonsuz norm ile hesaplanmıştır. Sonuçlar Şekil. 6.3'de gösterilmiştir. Dirichlet sınır koşulları için parçalama metodlarındaki hata terimleri sonsuz boyutlu uzayda $[0,T]$ zaman aralığındaki bazı pozitif T'ler için genellikle düzgün sınırlı değildir (Hansen and Ostermann, 2009). Dolayısıyla yakınsaklık mertebeleri garanti edilemez. Bu sebeple Dirichlet sınır koşulları durumundaki sayısal testlerimizde bir çok mertebe düşmesi gözlenmiştir. Şekil. 6.3'te ekstrapolasyon metodlarının düşük mertebe pozitif katsayılı metodlardan üstün olduğu açıkça gözlemlenmektedir. Bununla birlikte mertebe düşmesine rağmen yüksek mertebe ekstrapolasyon metodları, (6,2) ve Strang parçalama metodlarına kıyasla oldukça küçük hatalar oluşturmaktadır. Bu problemde 6. mertebe ekstrapolasyon metodu, diğer metodlara nazaran oldukça hassas sonuçlar üretmektedir. Ayrıca perturbe sistemler için geliştirilen $(6,2)$ metodu ν küçüldükçe daha iyi sonuç vermektedir. Şekil. 6.4'de ise parçalama metodları arasında üstünlük gösteren EXT6 metoduyla elde edilmiş farklı zamanlardaki sayısal çözümler gösterilmiştir.



Şekil 6.3: $\nu = 0.1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01$ (sağ panel) için Örnek 2'in $t = 1$(üst satır), $t = 3$ (alt satır) zamanlarında sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı.



Şekil 6.4: $\nu = 0.1$(sol panel), $\nu = 0.001$(sağ panel), $h = 0.0125$, $k = 0.01$ değerleri için Örnek 2'nin EXT6 metoduyla farklı zamanlardaki çözümleri.



Şekil 6.5: $\nu = 0.1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01$ (sağ panel) için Örnek 3'ün $t = 1$(üst satır), $t = 3$ (alt satır) zamanlarında sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı.

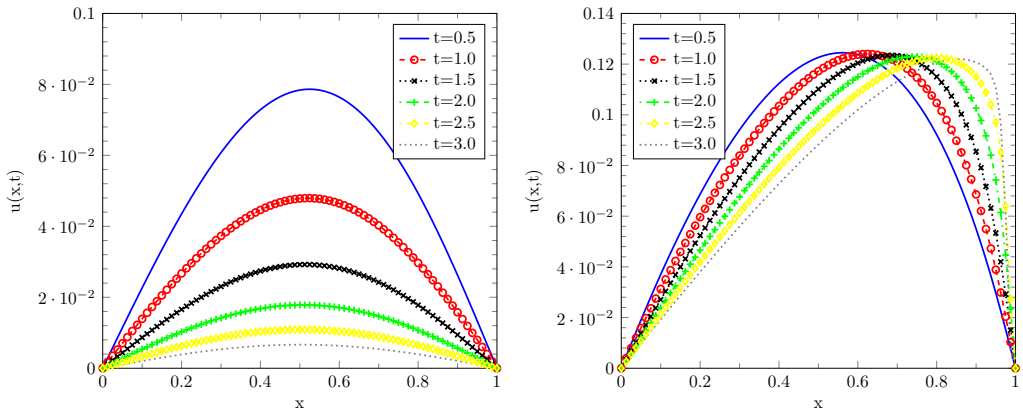
Örnek 3 Diğer bir örnek (2.12) denklemi $[0, 1]$ uzay aralığında

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{2}x(1 - x), \tag{6.12}$$

başlangıç koşulu ve (6.10) sınır koşulları ile ele alınmıştır. Bu problemin tam çözümü

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 exp\left\{-x^2(24\nu)^{-1}(3-2x)\right\} dx, \\ c_n &= 2\int_0^1 exp\left\{-x^2(24\nu)^{-1}(3-2x)\right\} cos(n\pi x)dx \qquad (n = 1, 2, 3\ldots). \end{aligned}$$

olmak üzere (6.11) ile kolayca hesaplanabilir.



Şekil 6.6: $\nu = 0.1$(sol panel), $\nu = 0.001$(sağ panel), $h = 0.0125$, $k = 0.01$ değerleri için Örnek 3'ün EXT6 metoduyla farklı zamanlardaki çözümleri.

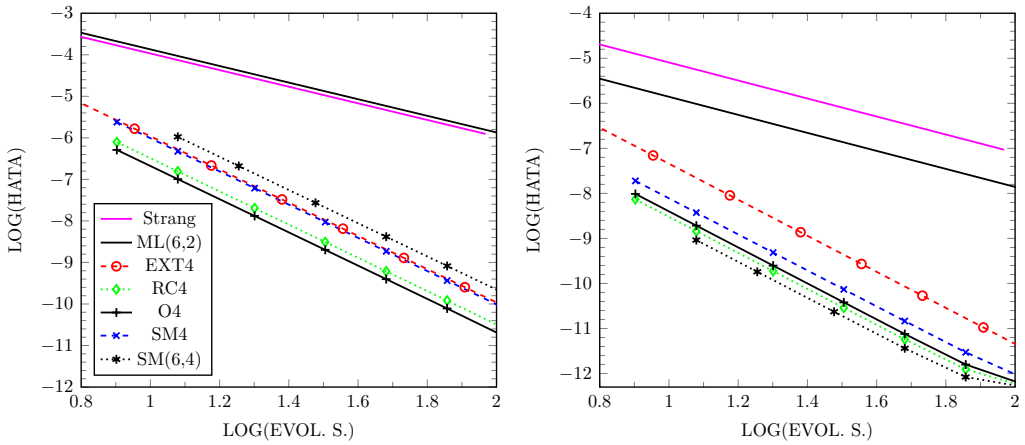
$\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$ ve (3.11) difüzyon matrisinin boyutu $D = 500$ olarak alınmıştır. Örnek 2'de uygulanan metodların $t = 1$, $t = 3$ son zaman değerleri için hataları hesaplanmıştır. Şekil. 6.5'te sonuçlara bakılırsa ekstrapolasyon metodlarının üstünlüğü belirgin bir şekilde gözlemlenmektedir. Ayrıca perturbe sistemler için geliştirilmiş metodun küçük parametreye olan hassaslığı açıkça görülmektedir. Şekil. 6.6'da ise parçalama metodları arasında üstünlük gösteren EXT6 metoduyla elde edilmiş farklı zamanlardaki sayısal çözümler gösterilmiştir.

Örnek 4 Bu örnekte (2.13) viskoziteli Benjamin-Bona-Mahony Burgers' denkleminin

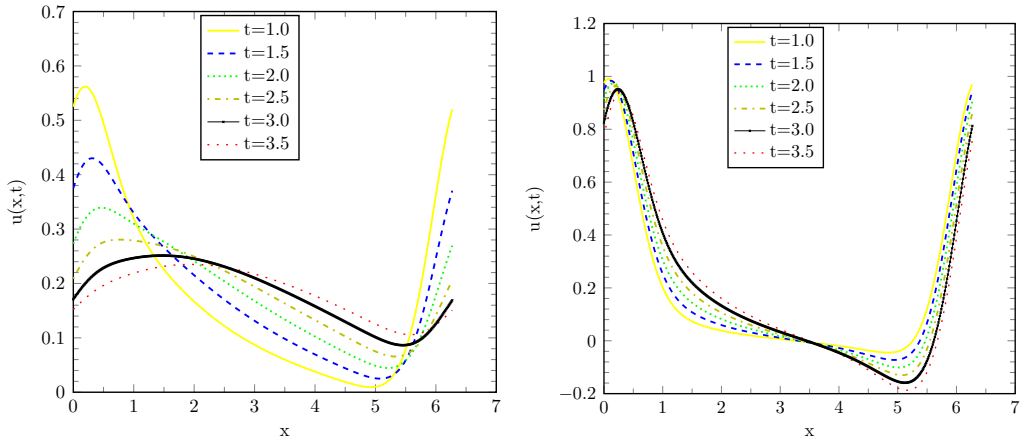
$$u(x, t = 0) = exp(-10sin(\frac{x}{2})^2) \tag{6.13}$$

başlangıç koşulu ve $[0, 2\pi]$ uzay aralığında periyodik sınır koşulları ile birlikte yüksek mertebeden parçalama metodları ile çözümleri elde edilmiştir. $\nu = 1, \beta = 1$, $\nu = 0.01, \beta = 0.1$ ve uzayda Fourier spektral ayrıklaştırma için ızgara noktalarının sayısı $N = 512$ olarak alınmıştır. Tam çözümler (3.2.2)'de verilen yöntem ile yeterince küçük zaman adımı için hesaplanmıştır. Sayısal çözümlerdeki hata, son zaman değerinde sonsuz norm kullanılarak elde edilmiştir. Şekil 6.7'de $[0, 2\pi]$ zaman aralığında Çizelge 6.1'de verilen parçalama metodlarının hassasiyeti karşılaştırılmıştır. Φ_k^A'ın evolüsyon sayısına karşın çözümlerdeki hatalar grafiklerle gösterilmiştir. Bütün metodlar için klasik mertebe p'ler, grafikte gösterildiği gibi elde edilmiştir. Kompleks katsayılı parçalama metodlarının diğer metodlara karşın daha iyi sonuçlar verdiği

kolayca görülür. Bununla birlikte, perturbe sistemler için elde edilen metodlar küçük ν ve β parametreleri için daha avantajlı hale gelmektedir. Şekil 6.8'de problemin ν ve β'nın farklı değerleri için en iyi sonuçları veren parçalama metodları ile farklı zamanlardaki çözümleri gösterilmiştir.



Şekil 6.7: $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$ (sağ panel) için Örnek 4'ün $t = 1$'de sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı.



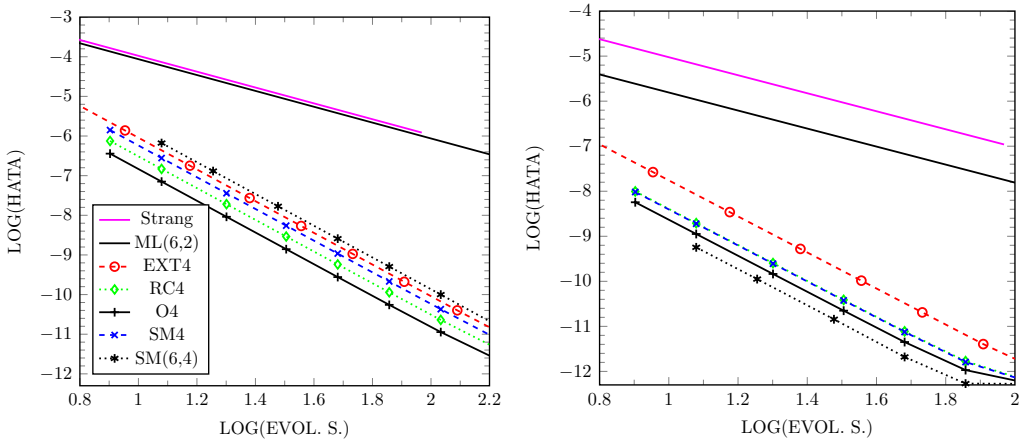
Şekil 6.8: $N = 512$, $k = 0.01$, $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) için O4 ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$(sağ panel) için efektif (6,4) metodları ile Örnek 4'ün farklı zamanlardaki çözümleri.

Örnek 5 Son örnek olarak (2.15) viskoziteli Rosenau-Burgers' denklemi

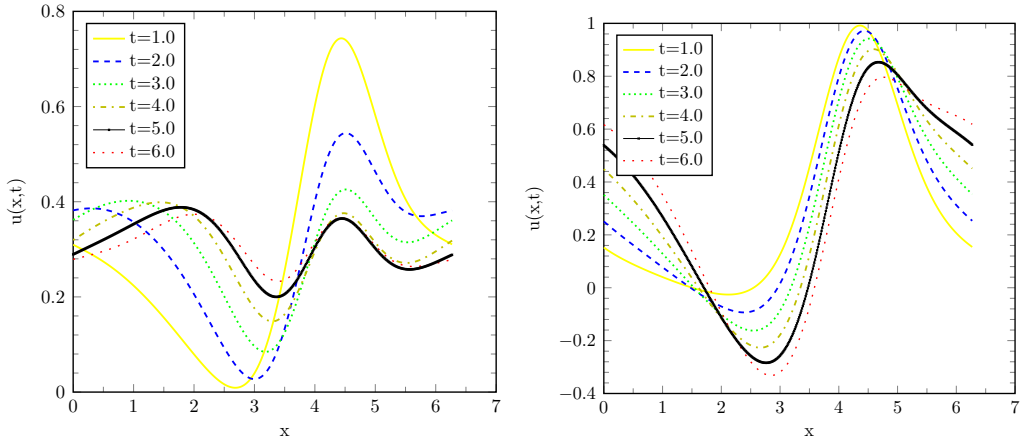
$$u(x,0) = exp(-4sin((x+2)/2)^2); \tag{6.14}$$

başlangıç koşulu ve $[0, 2\pi]$ uzay aralığında periyodik sınır koşulları ile birlikte yüksek mertebeden parçalama metodları ile çözümleri elde edilmiştir. $\nu = 1, \beta = 1$, $\nu = 0.01, \beta = 0.1$ ve uzayda Fourier spektral ayrıklaştırma için ızgara noktalarının sayısı $N = 512$ olarak alınmıştır. Tam çözümler (3.2.2)'de

gösterildiği gibi elde edilmiştir. Sayısal çözümlerdeki hata, sonsuz norm ile son zaman değeri için hesaplanmıştır. Şekil 6.7'de $[0, 2\pi]$ zaman aralığında çeşitli parçalama metodları ile sayısal çözümlerdeki hatalar karşılaştırılmıştır. Φ_k^A'nın evolüsyon sayısına karşın çözümlerdeki hatalar grafiklerle gösterilmiştir. Bütün metodlar için yakınsaklık mertebeleri p grafikte gösterildiği gibi elde edilmiştir. Kompleks katsayılı parçalama metodlarının daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Ayrıca, perturbe sistemler için geliştirilen metodlar ν ve β parametreleri küçüldükçe daha yüksek hassasiyette sonuçlar verdiği görülmektedir. Şekil 6.10'da problemin ν ve β'nın farklı değerleri için en iyi sonuçları veren parçalama metodları ile farklı zamanlardaki çözümleri verilmiştir.



Şekil 6.9: $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$ (sağ panel) için Örnek 5'in $t = 1$'de sayısal integrasyon hatasına karşı Φ_k^A'nın evolüsyon sayısı.



Şekil 6.10: $N = 512$, $k = 0.01$, $\nu = 1, \beta = 1$ (sol panel) için O4 ve $\nu = 0.01, \beta = 0.1$(sağ panel) için efektif (6,4) metodları ile Örnek 5'nin farklı zamanlardaki çözümleri.

7 SONUÇ

Bu tez çalışmasında doğrusal olmayan Burgers' tipi denklemlerin kompleks katsayılı ve reel pozitif katsayılı yüksek mertebeden parçalama metodları ile sayısal integrasyonu ele alınmıştır. Difüzyon ve adveksiyon denklemleri için yüksek mertebeden hassasiyetli bir çok metod bulunmaktadır. Ancak perturbe edilmiş kısmi diferansiyel denklemler için kararlı ve etkili bir metod oluşturmak çeşitli zorlukları da içermektedir. Yüksek mertebe parçalama metodlarında, difüzyon ve doğrusal olmayan adveksiyon denklemleri için uygun metodlar herhangi bir değişiklik yapılmadan ardışık olarak uygulanabilmektedir.

Bu tez çalışması boyunca çeşitli sınır koşulları ile verilmiş Burgers' tipi denklemlere uygulanmak üzere, 2. mertebeden yüksek metodlar üzerindeki mertebe engeli olan katsayıların pozitif olma koşulunu sağlayan bir çok parçalama prosedürü araştırılmıştır. Ayrıca Lie Trotter ve Strang metodlarına alternatif olarak yüksek mertebeden kompleks katsayılı metodlar ve ekstrapolasyon tekniği ile üretilmiş reel katsayılı metodlar incelenmiştir. Çeşitli sınır koşullarına bağlı olarak etkili uzay ayrıklaştırma metodları da sunulmuştur.

Burgers' tipi denklemlere uygulanması için geliştirilen sayısal metodlar için difüzyon yapısını etkileyen viskozite paremetresi ν, aşılması gereken bir engel oluşturmaktadır. Ancak bu tezde kullanılan perturbe edilmiş sistemler için geliştirilen parçalama metodlarında ν parametresi hassasiyet ölçümünü etkilemektedir. Dolayısıyla ν parametresini avantaja dönüştürmek için kullanılan bu tip sayısal metodlar ile Burgers' tipi denklemlerin daha hassas sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Sayısal örneklerde ise Dirichlet sınır koşulu için beklenen mertebe düşmesi rapor edilmiştir. Perturbe edilmiş sistemler için üretilen metodların, küçük viskozite parametresine karşı hassas olduğu ve Strang parçalama metodu kullanılarak üretilen ekstrapolasyon metodlarının etkili sonuç verdiği de gösterilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bateman, H., 1948, Some recent researchers on the motion of fluids., *Mon. Weather Rev.*, 43, 171–199pp.

Benjamin, T., **Bona, J.**, and **Mahoney, J.**, 1972, Model equations for long waves in nonlinear dispersive media., *Phil. Trans.Roy.Soc. Lond. A.*, 272, 47–78pp.

Benton, E. and **Platzman, G.W.**, 1972, A table of solutions of the one-dimensional Burgers equations., *Quart. Appl. Math.*, 30, 195–212pp.

Blanes, S. and **Casas, F.**, 2005, On the necessity of negative coefficients for operator splitting schemes of order higher than two., *Appl. Numer. Math.*, 54, 23–37pp.

Blanes, S., **Casas, F.**, **Chartier, P.**, and **Murua, A.**, 2013a, Optimized high-order splitting methods for some classes of parabolic equations., *Math. Comput.*, 82, 1559–1576pp.

Blanes, S., **Casas, F.**, **Farrés, A.**, **Laskar, J.**, **Makazaga, J.**, and **Murua, A.**, 2013b, New families of symplectic splitting methods for numerical integration in dynamical astronomy., *Appl. Numer. Math.*, 68, 58–72pp.

Blanes, S., **Casas, F.**, and **Ros, J.**, 1999, Extrapolation of symplectic integrators., *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 75, 149–161pp.

Burger, J.M., 1948, *A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence*, Academic Press.

Caldwell, J. and **Smith, P.**, 1982, Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number., *Appl. Math. Model.*, 6, 381–385pp.

Castella, F., **Chartier, P.**, **Descombes, S.**, and **Vilmart, G.**, 2009, Splitting methods with complex times for parabolic equations., *BIT*, 49, 487–508pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Cole, J.D., 1951, On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl.*, 9, 225–236pp.

Creutz, M. and **Gocksch, A.**, 1989, Higher-order hybrid Monte Carlo algorithms., *Phys. Rev. Lett.*, 63, 9–12pp.

Evans, D.J. and **Abdullah, A.R.**, 1984, The group explicit method for the solution of Burgers' equation., *Quart. Appl. Math.*, 30, 239–253pp.

Everstine, G., 2010, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, The George Washington University lecture notes.

Goldman, D. and **Kaper, T.J.**, 1996, nth-order operator splitting schemes and nonreversible systems., *SIAM J. Numer. Anal.*, 33, 349–367pp.

Griffiths, W.G. and **Schiesser, E.W.**, 2010, *Traveling wave analysis of partial differential equations: numerical and analytical methods with MATLAB and Maple*, Academic Press.

Hairer, E., **Lubich, C.**, and **Wanner, G.**, 2006, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Second edition.*, Springer Series in Computational Mathematics 31. Springer.

Hansen, E. and **Ostermann, A.**, 2009, High order splitting methods for analytic semigroups exist., *BIT*, 49, 527–542pp.

Hassanien, I.A., **Salama, A.A.**, and **Hosham, H.A.**, 2005, Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation., *Appl. Math. Comput.*, 70, 781–800pp.

Hesthaven, J., **Gottlieb, S.**, and **Gottlieb, D.**, 2007, *Spectral Methods for Time-Dependent Problems*, Cambridge University Press.

Holden, H., **Karlsen, K.H.**, and **Risebro, N.H.**, 1999, Operator Splitting Methods For Generalized Korteweg-De Vries Equations., *Journal of Computational Physics*, 153, 203–222pp.

Holden, H., **Karlsen, K.H.**, **Risebro, N.H.**, and **Tao, T.**, 2011, Operator splitting for the KdV equation., *Math. Comp.*, 80, 821–846pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Holden, H., **Lubich, C.**, and **Risebro, N.H.**, 2013, Operator splitting for partial differential equations with Burgers nonlinearity., *Math. Comp.*, 82, 173–185pp.

Hopf, E., 1950, The partial differential equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math.*, 3, 201–230pp.

Hundsdorfer, W. and **Verwer, J.**, 2003, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion Reaction Equations*, Springer Verlag.

Iserles, A., 2009, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press.

Jain, P.C. and **Holla, D.N.**, 1978, Numerical solution of coupled Burgers' equations., *Int. J. Nonlinear Mechanics*, 13(4), 213–222pp.

Jain, P.C. and **Raja, M.**, 1979, Splitting-up technique for Burgers' equations., *Indian J. pure appl. Math.*, 10, 1543–1551pp.

Jain, P.C., **Shankar, R.**, and **Singh, T.V.**, 1992, Cubic spline technique for solution of Burgers' equation with a semi-linear boundary condition., *Comm. Appl. Num. Meth.*, 8, 235–242pp.

Kassam, A.K. and **Trefethen, L.**, 2005, Fourth-order time stepping for stiff PDEs., *SIAM J. Sci. Comput.*, 26, 1214–1233pp.

Kutluay, S., **Bahadir, A.R.**, and **Ozdes, A.**, 1999, Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods., *J. Comput. Appl. Math.*, 103, 251–261pp.

Kutluay, S.A. and **Esen, A.**, 2004, A linearized numerical scheme for Burgers-like equations., *Appl. Math. Comput.*, 156, 295–305pp.

LeVeque, R., 1992, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Basel: Birkhäuser.

Liao, W., 2008, An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers' equation., *Appl. Math. Comput.*, 206, 755–764pp.

Logan, J., 2008, *An Introduction to nonlinear Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

McLachlan, R.I., 1995, Composition methods in the presence of small parameters., *BIT*, 35, 258–268pp.

Mitta, R.C. and **Signnal, P.**, 1993, Numerical solution of Burgers' equation., *Commun. Numer. Methods Eng.*, 9, 397–406pp.

Öziş, T. and **Erdoğan, U.**, 2009, An exponentially fitted method for solving Burgers' equation., *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 79, 696–705pp.

Öziş, T., **Esen, A.**, and **Kutluay, S.**, 2005, Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite-elements., *Appl. Math. Comput.*, 165, 237–249pp.

Öziş, T. and **Özdeş, A.**, 1996, A direct variational methods applied to Burgers' equation., *J. Comput. Appl. Math.*, 71, 163–175pp.

Rosenau, P., 1988, Dynamics of Dense Discrete Systems, *Progress of Theoretical Physics*, 79(5), 1028–1042pp.

Saka, B. and **Dag, I.**, 2008, A numerical study of the Burgers' equation., *Journal of the Franklin Institute*, 345, 328–348pp.

Seydaoğlu, M., **Erdoğan, U.**, and **Öziş, T.**, 2014, Numerical solution of the Burgers' equation with high order splitting methods., *Submitted*.

Seydaoğlu, M. and **Blanes, S.**, 2014, High-order splitting methods for separable non-autonomous parabolic equations., *Appl. Numer. Math.*, 84, 22–32pp.

Sheng, Q., 1989, Solving linear partial differential equations by exponential splitting., *IMA J. Numer. Anal.*, 9, 199–212pp.

Shu, C.W., 2003, High order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD., *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17, 107–118pp.

Shu, C.W., 2009, High Order Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes for Convection Dominated Problems., *SIAM Review*, 51, 82–126pp.

Strang, G., 2007, *Computational Science and Engineering*, Wellesley: Wellesley-Cambridge Press.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Suzuki, M., 1990, Fractal decomposition of exponential operators with applications to many-body theories and Monte Carlo simulations., *Phys. Lett. A*, 146, 319–323pp.

Trefethen, L.N., 2000, *Spectral methods in MatLab*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

Yoshida, H., 1990, Construction of higher order symplectic integrators., *Phys. Lett. A*, 150, 262–268pp.

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad : Muaz SEYDAOĞLU
- Adres : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
  35100, Bornova, İzmir
- Doğum Tarihi : 02.03.1984
- Doğum Yeri : Genç

Öğrenim Durumu

- 2003-2008 : Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı
- 2008-2010 : İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Yüksek Lisans Programı
- 2010- : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı Doktora Programı

BURSLAR

- Eylül 2012 - Eylül 2013 arasında YÖK tarafından bir yıllığına Valencia Politeknik Üniversitesinde doktora tez hakkında araştırma yapmak üzere verilen Yurtdışı doktora Bursu.